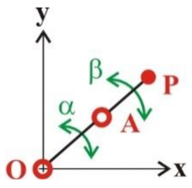
Transformation - Homogene Koordinaten - Beispiel

A Zwei Verknüpfte Drehungen

Ein realer Roboter enthält mehrere Achsen, die über Drehgelenke miteinander verbunden sind. Hier wird ein "einfaches Modell" dazu in R^2 behandelt. Das erlaubt auch, die Sachverhalte durch eine Skizze zu kontrollieren.

Vom Ursprung **O** geht eine starre Verbindung zum Punkt **A** und von dort eine starre Verbindung zum Punkt **P**. Im Ursprung **O** und in **A** ist ein Drehgelenk. Gesucht sind jeweils Ausdrücke zur Beschreibung der Lage von **A** und **P**.



{Die zusätzlich angegebenen Ergebnisse sind gerundet.}

Der Drehwinkel bei **O** sei α und der Drehwinkel bei **A** sei β.

Die Ausgangslagen sind **A**(2|3), **P**(4|6). {kartesisches Koordinatensystem}

Die Drehmatrix für eine Drehung um φ ist $\mathbf{D}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Ganz einfach: Drehung um **O** mit $\alpha = 30°$.

Dies dreht beide Punkte gleich: $\mathbf{a'} = \mathbf{D}_\alpha\, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0{,}23 \\ 3{,}60 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p'} = \mathbf{D}_\alpha\, \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0{,}46 \\ 7{,}20 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Drehung (nur) um **A** mit $\beta = 60°$.
A ist der Fixpunkt der Drehung.

Damit gilt für die Drehung $\mathbf{p'} = \mathbf{T}_A\, \mathbf{D}_\beta\, \mathbf{T}_A^{-1}\, \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0{,}40 \\ 6{,}23 \\ 1 \end{pmatrix}$

{Trivial, nur als eventuelle Rechenkontrolle: $\mathbf{a'} = \mathbf{a}$.}

$\mathbf{T}_A$ verschiebt **A** in den Ursprung **O**: $\mathbf{T}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Drehung um **O** (α= 30°) und um **A** (β=60°).

3a) Die erste Variante ist, zuerst um **A** zu drehen, dann um **O**

Für **A** ist dies dasselbe wie 1), $\mathbf{a'} = \mathbf{D}_\alpha\, \mathbf{a}$, weil die erste Drehung um den Fixpunkt **A** dessen Lage nicht ändert.

Für **P**: $\mathbf{p'} = \mathbf{D}_\alpha\, \mathbf{T}_A\, \mathbf{D}_\beta\, \mathbf{T}_A^{-1}\, \mathbf{p} = \begin{pmatrix} -2{,}77 \\ 5{,}60 \\ 1 \end{pmatrix}$

3b) "Lehrreich" ist die Vertauschung - zuerst um **O**, dann um **A**

{Hier zeigt sich auch der Vorteil homogener Koordinaten. Die durchgeführten Umformungen sind einfacher, weil für Rotation und Translation die gleiche mathematische Operation verwendet werden kann.}

Für **A** ist dies sofort angebbar, weil die 2. Rotation um **A** als Fixpunkt nichts ändert.
{Auch wieder Lage wie bei **1)**}

Für **P**: Falsch ist der einfache Ansatz $\mathbf{p'} = \mathbf{T}_A\, \mathbf{D}_\beta\, \mathbf{T}_A^{-1}\, \mathbf{D}_\alpha\, \mathbf{p}$, weil zwar richtig eingesetzt ist, dass die 2. Rotation um einen Fixpunkt erfolgt, aber die 1. Rotation hat auch die Lage von **A** schon verändert!

Dies kann man durch eine modifizierte Matrix $\mathbf{T}^M_A$ berücksichtigen,

$\mathbf{T}^M_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{x} \\ 0 & 1 & \mathbf{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; dabei werden als x, y die Koordinaten von Schritt **1)** eingesetzt.

Richtig ist also: $\mathbf{p'} = \mathbf{T}^M_A\, \mathbf{D}_\beta\, {\mathbf{T}^M_A}^{-1}\, \mathbf{D}_\alpha\, \mathbf{p}$

{$\mathbf{T}^M_A$ verschiebt wieder zurück nach **O**.}

Störend ist dabei, dass man für jedes α auch die Elemente der Matrix $\mathbf{T}^M_A$ ändern muss.

Ziel einer sinnvollen Beschreibung ist eher eine Endformel, in der nur einmal - anfangs - α anzugeben ist!
Beim ersten Lesen muss man "um die Ecke denken": Der Fixpunkt für die zweite Drehung ist das durch die erste Drehung geänderte **A**. Wenn diese Drehung zuerst rückgängig gemacht wird, dann verschoben und dann wieder gedreht, kann das alte T_A verwendet werden. {Dies entspricht einer Koordinatentransformation.}
Es ist also: $\mathbf{T^M_A} = \mathbf{D_\alpha\, T_A\, D_\alpha^{-1}}$
Das Inverse ist {mit $(\mathbf{A\,B\,C})^{-1} = \mathbf{C^{-1}\,B^{-1}\,A^{-1}}$}: $\mathbf{T^M_{A\text{-}1}} = \mathbf{D_\alpha\, T_A^{-1}\, D_\alpha^{-1}}$
Insgesamt entsteht ein Ausdruck: zwar richtig aber "unerfreulich":

Aus $\mathbf{p'} = \mathbf{T^M_A} \quad \mathbf{D_\beta\, {T^M_A}^{-1}} \quad \mathbf{D_\alpha\, p}$ schließlich

$$\mathbf{p'} = \mathbf{D_\alpha\, T_A\, D_\alpha^{-1}\, D_\beta\, D_\alpha\, T_A^{-1}\, D_\alpha^{-1}\, D_\alpha\, p}$$

Offenkundig sind einige Redundanzen enthalten!

$$\mathbf{p'} = \mathbf{D_\alpha\, T_A\, D_\alpha^{-1}\, D_\beta\, D_\alpha\, T_A^{-1}} \underbrace{\mathbf{D_\alpha^{-1}\, D_\alpha}}_{\mathbf{E}} \mathbf{p}$$

$$= \mathbf{D_\beta\, D_\alpha^{-1}\, D_\alpha} \quad \text{\{mögliche Vertauschung, weil gleiche Basisvektoren\}}$$

$$= \mathbf{D_\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{p'} = \mathbf{D_\alpha\, T_A\, D_\beta\, T_A^{-1}\, p}$$

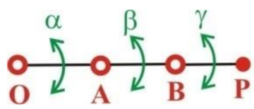
Das **ist** der **Ausdruck**, den wir in **3a)** schneller erhalten haben!
Das muss auch so sein! Beide Drehungen erfolgen um einen eindeutig definierten Fixpunkt (**O** oder **A**). Sie beeinflussen sich gegenseitig nicht! Das Ergebnis ist eindeutig, nur die in der Herleitung verwendete Reihenfolge ist verschieden.

Falls das Endergebnis in ganz kurzer Form gewünscht ist, kann man **T** und **D** zusammenfassen in 1 Matrix:

$$\Rightarrow \quad \mathbf{p'} = \mathbf{D_\alpha\, TD_{A\beta}\, T_A^{-1}\, p}$$

B Drei Verknüpfte Drehungen

Erweiterung: Drei Drehpunkte.
Alle Punkte liegen anfangs auf einer Geraden.



Für **O** und **A** ist das identisch zum Vorigen. Die zusätzliche Drehung γ hat **B** als Fixpunkt.
Zusätzliche Zahlenwerte (für eine eventuelle Kontrolle der Rechnung mit einer Skizze):
{Am einfachsten ist die Anordnung aller Punkte auf der x-Achse}
O im Ursprung, **A** bei 3, **B** bei 7, **P** bei 9; $\alpha = 30°$, $\beta = 40°$, $\gamma = 50°$.
Wichtig im Folgenden: Die Matrizen **T** werden jeweils auf den Vorgängerpunkt und nicht stets auf den Anfangspunkt **O** bezogen!

$$\mathbf{T_A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T_B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach den vorigen Resultaten ist es sinnvoll, vom Ende her die Drehungen zu berechnen.

1. 50° um Fixpunkt **B**
   Die Translation, um **B** in den Ursprung **O** zu verschieben, ist $\mathbf{T_{AB}} = \mathbf{T_A\, T_B}$.
   Damit $\mathbf{p'} = \mathbf{T_{AB}\, D_\gamma\, T_{AB}^{-1}\, p} = \begin{pmatrix} 8{,}29 \\ 1{,}53 \\ 1 \end{pmatrix}$
   Wendet man das auf **b** an, ändert sich nichts, weil **B** der Fixpunkt ist.
   Wendet man das auf **A** an, folgt ein falsches Resultat. Die richtige Translation nach **O** zeigt, dass **A** sich auch nicht ändert mit $\mathbf{a'} = \mathbf{T_A\, D_\gamma\, T_A^{-1}\, a}$.
   Damit ist geklärt: Die Drehung ist "vom Ende her" auf einen Punkt anzuwenden, Fixpunkt ist jeweils der Vorgängerpunkt. Alle Vorgängerpunkte bleiben in der Anfangsposition. (Das ist wesentlich, damit die anfangs definierten Matrizen **T** auch noch gelten!)

2. 40° um Fixpunkt **A**

   $\mathbf{p''} = \mathbf{T_A}\,\mathbf{D_\beta}\,\mathbf{T_A}^{-1}\,\mathbf{p'} = \begin{pmatrix}6{,}06\\4{,}57\\1\end{pmatrix}$

   {**B** ändert sich auch: $\mathbf{b''} = \mathbf{T_A}\,\mathbf{D_\beta}\,\mathbf{T_A}^{-1}\,\mathbf{b} = \begin{pmatrix}6{,}06\\2{,}57\\1\end{pmatrix}$}

3. 30° um **O** (**O** ist trivialerweise auch der Fixpunkt)

   $\mathbf{p'''} = \mathbf{D_\alpha}\,\mathbf{p''} = \begin{pmatrix}2{,}97\\6{,}99\\1\end{pmatrix}$

   {$\mathbf{b'''} = \begin{pmatrix}3{,}97\\5{,}26\\1\end{pmatrix}$; $\mathbf{a'''} = \begin{pmatrix}2{,}60\\1{,}50\\1\end{pmatrix}$}

Endresultat für **P**: $\mathbf{p'''} = \mathbf{D_\alpha}\,\mathbf{T_A}\,\mathbf{D_\beta}\,\mathbf{T_A}^{-1}\,\mathbf{T_{AB}}\,\mathbf{D_\gamma}\,\mathbf{T_{AB}}^{-1}\,\mathbf{p}$

Redundanz: $\mathbf{T_A}^{-1}\,\mathbf{T_{AB}} = \mathbf{T_B}$

In $\mathbf{p'''} = \mathbf{D_\alpha}\,\mathbf{T_A}\,\mathbf{D_\beta}\,\mathbf{T_B}\,\mathbf{D_\gamma}\,\mathbf{T_{AB}}^{-1}\,\mathbf{p}$ kommt zweimal die Reihenfolge "**T D**" vor, die sich in 1 Matrix "**TD**" kürzer schreiben lässt.

$\Rightarrow \mathbf{p'''} = \mathbf{D_\alpha}\,\mathbf{TD_{A\beta}}\,\mathbf{TD_{B\gamma}}\,\mathbf{T_{AB}}^{-1}\,\mathbf{p} = \begin{pmatrix}2{,}97\\6{,}99\\1\end{pmatrix}$

$\mathbf{TD_{Punkt,Winkel}}$ enthält die Translation vom jeweiligen Vorgängerpunkt und die Rotation aller Nachfolgerpunkte um den Drehwinkel an diesem Punkt. Weil bei der richtigen Reihenfolge "von Ende her" Vorgängerpunkte nicht geändert werden, muss **TD** nur anfangs einmal festgelegt werden.

C Allgemein: Verknüpfte Drehungen

Die Reihenfolge sei **O - A - B - ... - P**

Zwischenbeispiel: Für 4 Punkte ist das Ergebnis nach Erweiterung um Drehpunkt **C**

$\mathbf{p''''} = \mathbf{D_\alpha}\,\mathbf{T_A}\,\mathbf{D_\beta}\,\mathbf{T_A}^{-1}\,\mathbf{T_{AB}}\,\mathbf{D_\gamma}\,\mathbf{T_{AB}}^{-1}\,\mathbf{T_{ABC}}\,\mathbf{D_\delta}\,\mathbf{T_{ABC}}^{-1}\,\mathbf{p}$

Zusammengefasst: $\mathbf{p''''} = \mathbf{D_\alpha}\,\mathbf{TD_{A\beta}}\,\mathbf{TD_{B\gamma}}\,\mathbf{T_{C\delta}}\,\mathbf{T_{ABC}}^{-1}\,\mathbf{p}$ **("Endformel")**

Die Bearbeitungsschritte im allgemeinen Fall sind also

1. Verschiebung des letzten Drehpunkts nach **O**
2. Verschiebung jeweils zum Vorgängerpunkt und Drehung "vom Ende her" (damit jeweils richtige Fixpunkte)
3. Drehung um 1. Punkt **O**

Hinweis: Hier ist angenommen, dass der erste Punkt der Anordnung der Koordinatenursprung **O** ist. Falls auch der erste Punkt "**O**" nicht im Ursprung liegt, ist der erste Ausdruck zu ändern, $\mathbf{D_\alpha}$ in $\mathbf{TD_{O\alpha}}$, weil auch dafür eine Transformation auf den Fixpunkt nötig ist

Verständnisfrage: Wo ist in der "Endformel" die richtige Anpassung an die Fixpunkte? Die Ausdrücke "**TD**" verschieben jeweils 1 Punkt weiter auf das Ende zu, es müsste doch eher rückwärts verschoben werden! → In der ausführlichen Herleitung unter B ist erkennbar, dass anfangs jeweils die Folge "Verschiebung in Fixpunkt, Drehung, Zurückverschiebung enthalten ist - z.B. $\mathbf{T_{AB}}\,\mathbf{D_\gamma}\,\mathbf{T_{AB}}^{-1}$". Erst am Ende werden Ausdrücke zusammengefasst. Die Verschiebung um 1 Punkt "nach vorne" entsteht ebenso durch eine Zusammenfassung. Beispiel: $\mathbf{T_A}^{-1}\,\mathbf{T_{AB}} = \mathbf{T_B}$ enthält die Verschiebung 1 Punkt zurück für den nächsten Fixpunkt und davor die Rückverschiebung für den vorangehenden Fixpunkt; insgesamt ist das gleichbedeutend mit einer Verschiebung 1 Punkt nach vorne.

Ergänzung: Die Formel "$\mathbf{p}^{\mathbf{ENDE}}$ = ..." ändert sich nicht, wenn auch noch Änderungen des Abstands zweier Drehpunkte zugelassen werden. Es sind nur in $\mathbf{T_i}$ für den jeweiligen Drehpunkt **i** die anderen Koordinaten, relativ zum Vorgängerpunkt, einzutragen. Und ebenso ist mit einer Änderung der **T**-Matrizen auch eine gewinkelte Anfangsanordnung möglich.

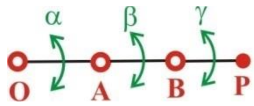
➔ **Bei einer manuellen Skizze würde man genauso von hinten her die Punkte abarbeiten - jeweils Drehung für alle Nachfolgerpunkte mit dem aktuellen Punkt als Fixpunkt der Drehung. Die hergeleitete Beziehung zeigt, wie dieses einsichtige Vorgehen rechnerisch umgesetzt werden kann.**

<u>Vergleich</u>: "Manuell" ist die Rechnung selbstverständlich auch mit den gewohnten inhomogenen Koordinaten durchführbar!

Man verwendet sinnvollerweise wieder eine Abarbeitung "von hinten her".

1. Verschiebung des Koordinatensystems, damit der letzte Drehpunkt der Fixpunkt der Drehung wird. Dann Drehung. Dann Verschiebung des Koordinatensystems rückgängig machen.
2. Für den nächsten Punkt zurück: Verschiebung Koordinatensystem, Drehung, Verschiebung Koordinatensystem rückgängig. {Beginn jeweils mit dem Endpunkt des Vorgängerschritts}
3. Für ersten Punkt nur Drehung, wenn dieser im Koordinatenursprung liegt. {Sonst auch dafür Koordinatentransformation wie bei 2.}

Dazu als konkretes Beispiel nochmals die Anordnung von B)



O(0|0); **A**(3|0); **B**(7|0); **P**(9|0); $\alpha = 30°$, $\beta = 40°$, $\gamma = 50°$.

Drehmatrix jeweils $\mathbf{D}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

1. Letzter Drehpunkt **B**
   Verschiebung, damit **B** der Fixpunkt wird: $\mathbf{p}^{(1A)} = \begin{pmatrix} 9-7=5 \\ 0-0=0 \end{pmatrix}$
   Drehung um **B**: $p^{(1B)} = \mathbf{D}_\gamma\, p^{(1A)} = \begin{pmatrix} 1{,}29 \\ 1{,}53 \end{pmatrix}$
   Zurückverschiebung: $\mathbf{p}^{(1C)} = \begin{pmatrix} 1{,}29+7=8{,}28 \\ 1{,}53+0=1{,}53 \end{pmatrix}$
2. Nächster Drehpunkt zurück
   Verschiebung, damit **A** der Fixpunkt wird: $\mathbf{p}^{(2A)} = \begin{pmatrix} 8{,}29-3=5{,}29 \\ 1{,}53-0=1{,}53 \end{pmatrix}$
   Drehung um **A**: $\mathbf{p}^{(2B)} = \mathbf{D}_\beta\, \mathbf{p}^{(2A)} = \begin{pmatrix} 3{,}06 \\ 4{,}57 \end{pmatrix}$
   Zurückverschiebung: $\mathbf{p}^{(2C)} = \begin{pmatrix} 3{,}06+3=6{,}06 \\ 4{,}57+0=4{,}57 \end{pmatrix}$
3. Erster Drehpunkt
   Keine Verschiebung nötig, weil **O** schon der (gewünschte) Koordinatenursprung ist
   Drehung um **O**: $\mathbf{p}^{(ENDE)} = \mathbf{D}_\alpha\, \mathbf{p}^{(2C)} = \begin{pmatrix} 2{,}97 \\ 6{,}99 \end{pmatrix}$

Es fällt auf, dass auch hier zwei Translationen direkt aufeinander folgen, z.B. anfangs für $\mathbf{p}^{(1B)} \rightarrow \mathbf{p}^{(1C)} \rightarrow \mathbf{p}^{(2A)}$. Dies kann zu <u>einer</u> Translation zusammengefasst werden. Wenn wir, wie bei den homogenen Koordinaten, die Verschiebung nur jeweils zum Vorgängerknoten betrachten, ist dies mit der Kennzeichnung $\underline{\mathbf{T}}$ für die Translation: $\underline{\mathbf{T}}_{\mathbf{AB}} \rightarrow \underline{\mathbf{T}}^{-1}{}_{\mathbf{A}}$.

Dies ist dasselbe wie $\underline{\mathbf{T}}_{\mathbf{B}}$! Explizit: $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Damit ist die Reihenfolge der Operationen kürzer geschrieben:
$\mathbf{p}^{(ENDE)} = \mathbf{D}_\alpha\, \underline{\mathbf{T}}_{\mathbf{A}}\, \mathbf{D}_\beta\, \underline{\mathbf{T}}_{\mathbf{B}}\, \mathbf{D}_\gamma\, \underline{\mathbf{T}}^{-1}{}_{\mathbf{AB}}\, \mathbf{p}$

Die <u>Reihenfolge</u> der Operationen ist <u>identisch</u> <u>zu</u> der vorher für <u>homogene</u> <u>Koordinaten</u> hergeleiteten: $\mathbf{p}''' = \mathbf{D}_\alpha\, \mathbf{TD}_{\mathbf{A}\beta}\, \mathbf{TD}_{\mathbf{B}\gamma}\, \mathbf{T}_{\mathbf{AB}}{}^{-1}\, \mathbf{p}$

Bei den inhomogenen Koordinaten müssen wir zwischen den verschiedenen Rechenarten Matrixmultiplikation und Vektoraddition wechseln, bei homogenen Koordinaten ist stets nur eine Art Matrixmultiplikation nötig!

Zusätzlich ist bei homogenen Koordinaten die einfache Zusammenfassung "**TD**" möglich oder die <u>Zusammenfassung</u> aller Operationen in <u>eine</u> Matrix möglich. Bei inhomogenen Koordinaten ist dies nicht möglich, die Operationen müssen nacheinander mit abwechselnden Rechenarten angewandt werden!