Transformation - Homogene Koordinaten

In der "üblichen" Behandlung werden für die Verschiebung (Translation) und die Drehung (Rotation) verschiedene Rechenvorschriften benutzt - einmal Addition von Vektoren und einmal Multiplikation mit einer Matrix. In "üblichen" Anwendungen gibt das keine Probleme. Wenn mehrere Transformation nacheinander durchzuführen sind, ist das umständlich. Dafür wurden die "homogenen Koordinaten" eingeführt. Damit lassen sich Verschiebung und Drehung gleichartig durch eine Multiplikation Matrix·Vektor beschreiben! In der Computergrafik und Robotik liefert das eine enorme Vereinfachung.

Hier wird das Prinzip in R^2 gezeigt. Damit lassen sich die Rechnungen auch durch eine Skizze kontrollieren. Ziel ist nicht, alle Möglichkeiten zu beschreiben. Am Beispiel der Verschiebung und Drehung soll der Vorteil gezeigt werden. In Beispielen wird dieses Verfahren auch mit dem gewohnten Formalismus verglichen.

{Das Prinzip ist (natürlich) in R^3 gleich. Dort werden die 3 Komponenten auf 4 erweitert.}

1. Prinzip

Die Koordinatendarstellung wird um 1 Komponente erweitert:

Für einen Punkt: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ erweitert zu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Die Transformationsmatrix wird analog erweitert:

Für die Drehung: $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ erweitert zu $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & \mathbf{0} \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Es gilt die bisher benutzte Vorschrift **x'** = **D x** weiterhin.

$$\mathbf{D\,x} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Neu ist die Matrix für die Verschiebung.

Bisher haben wir gerechnet $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$

Jetzt gilt für dieselbe Verschiebung $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{a} \\ 0 & 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}$

{Dabei ist die Teilmatrix für die Drehung **E** - für eine "Drehung um 0 Grad.}

Diese Operation sei als "**T x**" gekennzeichnet.

VORTEIL: Beide Transformationsarten sind mit einer mathematischen Operation erklärt. Damit lassen sich auch die Rechenregeln für Matrizen anwenden.

WARNUNG: "Üblicherweise" beziehen sich alle Angaben auf ein Koordinatensystem, genauer ein Basissystem. Wenn ein Wechsel der Basis stattfindet, ist das zusätzlich zu berücksichtigen!

HINWEIS: Der vollständige Formalismus enthält natürlich noch weitere Transformationen!

HINWEIS: Interessant ist die Differenz zweier Punkte.

$\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Damit ist die dritte Komponente für einen Punkt und einen Vektor verschieden. Im "üblichen" Formalismus muss zwischen einem freien Vektor und einem gebundenen Vektor (Ortsvektor) - bei gleicher Darstellung - unterschieden werden, hier ist das direkt angegeben.

2. Inverse Transformationen

In der Anschauung bedeutet die Umkehrung einer Verschiebung um +**x** eine Verschiebung um -**x** und die Umkehrung einer Drehung um $+\alpha$ eine Drehung um $-\alpha$.

Es gilt auch für die Matrizen: $\mathbf{T}^{-1}(+\mathbf{x}) = \mathbf{T}(-\mathbf{x})$ und $\mathbf{D}^{-1}(+\alpha) = \mathbf{D}(-\alpha)$.
Die manuell umständliche Berechnung einer inversen Matrix ist nicht nötig. Schneller kann kontrolliert werden, dass $\mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{T} = \mathbf{E}$ (Einheitsmatrix) und $\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{D} = \mathbf{E}$ gilt.

{Als Transformations-Operation entspricht **E** der Identität, die das Objekt nicht ändert, als Matrix der Einheitsmatrix.}

3. Wiederholungen von Transformationen

Wiederholungen von Transformationen sollten auch beschreibbar sein.

♦ Verschiebung

Nach der unmittelbaren Anschauung ist eine wiederholte Verschiebung gleichwertig zu einer einmaligen Verschiebung mit der Summe sein. Ebenso sollten aufeinander folgende Drehungen um verschiedene Winkel gleich einer einmaligen Drehung mit der Summe der Winkel sein.

$\mathbf{T}_2\,\mathbf{T}_1\,\mathbf{x} = \mathbf{T}_{12}\,\mathbf{x}$ und $\mathbf{D}_2\,\mathbf{D}_1\,\mathbf{x} = \mathbf{D}_{12}\,\mathbf{x}$.

Für die Verschiebung ist das schnell verifiziert.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & c\\ 0 & 1 & d\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & a+c\\ 0 & 1 & b+d\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Zusätzlich sehen wir, dass $\mathbf{T}_2\,\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1\,\mathbf{T}_2$ - wie auch anschaulich erwartet. {Bei der Kombination zweier Verschiebungen ist die Reihenfolge unbedeutend.}

♦ Drehung

Analoges gilt für Drehung. {Für die Verifikation Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen anwenden.}
WICHTIG: Alle verknüpften Drehungen müssen dabei denselben Fixpunkt Koordinatenursprung besitzen! Dann gilt einfach $\mathbf{D}(\alpha)\,\mathbf{D}(\beta) = \mathbf{D}(\alpha + \beta)$.

♦ Kombination Verschiebung / Drehung

Was gilt für die Kombination aus Verschiebung <u>und</u> Drehung? Anschaulich erwarten wir, dass die Reihenfolge eine Rolle spielt! Grund ist die vorher benutzte Matrix **D**. Diese beschreibt eine Drehung um den Koordinatenursprung als Fixpunkt!

<u>A)</u> **T D x**:

Unproblematisch! Zuerst die Drehung um den Ursprung, dann die Verschiebung. {Für die als Erstes erfolgende Drehung ist der Koordinatenursprung des Systems, in dem **x** definiert ist, auch der Fixpunkt. Wichtig ist nur, dass die Verschiebung auch im gleichen Basissystem wie **x** definiert ist.}

<u>B)</u> **D T x**:

Vorsicht! Hier wird zuerst verschoben, dann um den Ursprung gedreht. Das ist etwas anderes als zuerst eine Verschiebung und dann eine Drehung um den ebenfalls verschobenen Ursprung. Die zweite Kombination muss (irgendwie) anders behandelt werden!

<u>A)</u> Wir betrachten genauer zuerst "**T D**".

$$\mathbf{T\,D} = \begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & \mathbf{a}\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & \mathbf{b}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (\mathbf{TD})$$

Verschiebung und Drehung können <u>gemeinsam</u> in <u>einer</u> Matrix behandelt werden, wenn die Reihenfolge zuerst Drehung um den Ursprung und dann Verschiebung ist.

In dieser Reihenfolge ist für die Drehung der Fixpunkt der Koordinatenursprung. Dieser verändert sich durch die Drehung nicht. Die Verschiebung wird als zweites auch von diesem Fixpunkt aus betrachtet.

B) Nun "**D T**".

$$\mathbf{D\ T} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & \mathbf{a \cdot \cos(\alpha) - b \cdot \sin(\alpha)} \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & \mathbf{a \cdot \sin(\alpha) + b \cdot \cos(\alpha)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt also nicht **T D** = **D T**!

WICHTIG: Es ist genau zu beachten, was damit errechnet wird. Zuerst wird verschoben, dann aber um den Ursprung gedreht. {Für Koordinaten eines Punkts ist dann: Der Punkt wurde verschoben, aber das verschiebt nicht automatisch den Ursprung mit. Die Drehung erfolgt also immer noch um den alten Ursprung als Fixpunkt!)

B') Eine **Ergänzung** ist:

Ausgang sei ein System **1**. Vor der Drehung führen wird zuerst eine Verschiebung durch. Diese soll die Punkte in **1** und den Ursprung von **1** verschieben. Mit dem so auch verschobenen Ursprung entsteht ein System **2**. Anschließend soll die Drehung um den Ursprung dieses Systems **2** erfolgen. Am Ende entstehen durch Rückverschiebung die Koordinaten im Ausgangs-System **1**. Das bedeutet als Ergebnis eine Drehung im System **1** aber nicht mehr um den Ursprung von **1** als Fixpunkt, sondern um den Punkt der in **1** durch **T** erreicht wird.

$\Rightarrow$ Anstelle von **D** muss $\mathbf{T\ D\ T^{-1}}$ verwendet werden.

Wenn um den Koordinatenursprung gedreht wird:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn um den Fixpunkt **F**(a|b) gedreht wird:

$$\mathbf{T\ D\ T^{-1}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & -a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) + a \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & -a\sin(\alpha) - b\cos(\alpha) + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

{Zuerst Verschiebung von **F** in den Ursprung, dann Drehung, dann Zurückverschiebung an den alten Ort.}

Ein **Sonderfal**l ist, dass **T** in "**D T**" und in "$\mathbf{T\ D\ T^{-1}}$" dasselbe ist. Anschaulich ist dann einsichtig, dass es äquivalent ist, ob wir zuerst drehen und dann um **v** verschieben oder ob wird zuerst um **v** verschieben und um den mitverschobenen Ursprung drehen.

Diese Äquivalenz ist formal schnell verifiziert:

$(\mathbf{T\ D\ T^{-1}})\ \mathbf{T\ x}$ ist $\mathbf{T\ D\ T^{-1}\ T\ x} = \mathbf{T\ D\ E\ x} = \mathbf{T\ D\ x}$.

{Die Multiplikation der Matrizen liefert dasselbe Ergebnis. Die Möglichkeit, für Translation und Rotation einheitlich Operationen mit Matrizen durchführen zu können, ist der entscheidende Vorteil.}

{Für den Sonderfall des gleichen **T** ist die Variante *B'* äquivalent zu *A*).}

♦ Beispiel

In einem Koordinatensystem werden Punkte verschoben und gedreht. Gesucht sind die am Schluss folgenden Koordinaten. Zum leichteren Verständnis des Textes zwei Punkte, **A**(0|0) und **B**(4|3). (Auf **A** und **B** werden jeweils die gleichen Operationen angewandt.)

- 1. Verschiebung um $\binom{2}{1}$.
- 2. Drehung um +30° um den Punkt **A**.
  (Hinweis: **A** hat natürlich wegen der 1. Verschiebung auch andere Koordinaten. Trivial ist, dass sich **A** bei der Drehung um **A** nicht ändert.)
- 3. Verschiebung um $\binom{3}{-2}$.
- 4. Drehung um -45° um den Punkt **A**. (Hinweis wie bei 2.)

Bei der Drehung muss der Fixpunkt beachtet werden!

Lösung - zuerst *allgemein*

Formal: Drehung 2 - Verschiebung 2 - Drehung 1 - Verschiebung 1 - Punkt.
"$\mathbf{D_2\, T_2\, D_1\, T_1\, p}$"

- 1. Schritt: Translation $\mathbf{T_1\, p}$
- 2. Schritt: "$\mathbf{D\,(T_1\, p)}$"; weil der Fixpunkt nicht mehr im Koordinatenursprung sondern bei **A** ist: $\mathbf{(T_1\, D_1\, T_1^{-1})\, T_1\, p}$.
- 3. Schritt: Translation $\mathbf{T_2\, T_1\, D_1\, T_1^{-1}\, T_1\, p}$
- 4. Schritt: "$\mathbf{D_2}$ **(bisheriges)**"; Drehung um den jetzt erreichten Fixpunkt **A**. vor der Drehung muss in den Koordinatenursprung zurückgeschoben werden. Es muss die zweifache Verschiebung rückgängig gemacht werden! Zusammengefasst $\mathbf{T_{12} = T_2\, T_1}$. Damit $\mathbf{T_{12}\, D_2\, T_{12}^{-1}}$ **(bisheriges).** Wegen $\mathbf{(A\, B)^{-1} = B^{-1}\, A^{-1}}$ ist die korrekte Reihenfolge $\mathbf{T_{12}^{-1} = T_1^{-1}\, T_2^{-1}}$. (Hier ist dies unwichtig, weil $\mathbf{T_1\, T_2 = T_2\, T_1}$.)

Insgesamt entsteht $\mathbf{T_2\, T_1\, D_2\, T_1^{-1}\, T_2^{-1}\, T_2\, T_1\, D_1\, T_1^{-1}\, T_1\, p}$

Bevor wir das berechnen Ausdruck ansehen! Es kommt öfters "$\mathbf{T^{-1}\, T}$" vor und das ist **E**!
Vereinfacht entsteht $\mathbf{T_2\, T_1\, D_2\, D_1\, p}$. Direkt aufeinanderfolgende Transformationen lassen sich auch zusammenfassen. Damit $\mathbf{T_{12}\, D_{12}\, p}$.

In Worten bedeutet das: Zuerst Drehung um die Summe der Winkel um den Koordinatenursprung, dann Verschiebung um die Summe der beiden Einzelverschiebungen.

Durch "anschauliche Überlegung" wäre man zum selben Resultat gekommen.

Schließlich können wir die Verschiebung und die Drehung einfacher in einer Matrix ausdrücken, weil die Forderung "Drehung um den Koordinatenursprung" erfüllt ist.

Lösung - *Zahlenwerte*

gesamte Verschiebung: $\begin{pmatrix} 2+3=5 \\ 1-2=\ -1 \end{pmatrix}$; gesamte Drehung: +30° + (-45°) = -15°

Punkt **B**: $\begin{pmatrix} \cos(-15°) & -\sin(-15°) & 5 \\ \sin(-15°) & \cos(-15°) & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 9{,}64 \\ 0{,}86 \\ 1 \end{pmatrix}$

"Kontrolle" für **A**: $\begin{pmatrix} \cos(-15°) & -\sin(-15°) & 5 \\ \sin(-15°) & \cos(-15°) & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

{Wie erwartet liegt **A** am Endpunkt der beiden Verschiebungen; die Drehungen um den jeweiligen Ort ändern diesen nicht.}

In Einzelschritten gerechnet:

B: $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3{,}96 \\ 5{,}60 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6{,}96 \\ 3{,}60 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 9{,}64 \\ 0{,}86 \\ 1 \end{pmatrix}$; **A**: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

{"Konventionell" gerechnet, sind unter Verwendung von **D** und **T** dieselben Zusammenfassungen möglich.}

4. Drehung um einen Fixpunkt

F(a|b) - bezogen auf den Ursprung des aktuellen Koordinatensystems; Drehung um α

Wie vorher schon angegeben, ist $\mathbf{T\, D\, T^{-1}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & -a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) + a \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & -a\sin(\alpha) - b\cos(\alpha) + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

auf den Punkt anzuwenden.

5A. Koordinatensystem-Transformation - Translation

Voraussetzung:

Basissystem **1**: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$; Basissystem **2** $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$

Beide Systeme seien orthonormiert, haben damit auch gleiche Skalierung.

Eine Verschiebung ändert nicht die Länge und Orientierung, daher sind $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2$.

Die Koordinaten eines Punkt bzw. Vektors sind aber verschieden!

{Im allgemeinen Fall müssen die Koordinaten in einem System transformiert werden, damit die Forderung "zwei gleiche Systeme" erfüllt ist. Dies wird hier nicht mehr explizit durchgeführt. Bei Interesse: "Lineare Algebra, V06.}

$\mathbf{p(1)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ verschiebt den Ursprung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$

Dies ist die Translation von System **2** relativ zu System **1**.

Für die Koordinaten eines Punkts in diesen Systemen wird invers ("kontragredient") transformiert.

$$\mathbf{p(2)} = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{p(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Direkt aufeinanderfolgende Translationen können zusammengefasst werden.

$$\mathbf{T_1}\,\mathbf{T_2} = \mathbf{T_{12}}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+c \\ 0 & 1 & b+d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5B. Koordinatensystem-Transformation - Rotation

Voraussetzung:

Basissystem **1**: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$; Basissystem **2** $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$

Beide Systeme seien orthonormiert, haben damit auch gleiche Skalierung.

Eine Rotation ändert nicht die Länge aber die Orientierung!

Es gilt $|\,\mathbf{e}_i\,| = |\,\mathbf{f}_i,|$ aber $\mathbf{e}_i \neq \mathbf{f}_i$.

Die Koordinaten eines Punkt bzw. Vektors transformieren sich kontragredient zur Transformation der Basisvektoren.

{Zur einfachen Rechnung ist für die Inverse $\mathbf{D}^{-1}(\alpha) = \mathbf{D}(-\alpha)$ bekannt.}

System **2** sei um $+\alpha$ relativ zu System **1** gedreht.

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{p}(\underline{\mathbf{2}}) = \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{p}(\underline{\mathbf{1}})$

Direkt aufeinander folgende Rotationen können zusammengefasst werden:

$\mathbf{D}(\alpha)\,\mathbf{D}(\beta) = \mathbf{D}(\alpha + \beta)$

5C. Koordinatensystem-Transformation - Translation + Rotation

Voraussetzung:

Basissystem **1**: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$; Basissystem **2** $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$

Beide Systeme seien orthonormiert, haben damit auch gleiche Skalierung.

Es gilt $|\,\mathbf{e}_i\,| = |\,\mathbf{f}_i,|$ aber $\mathbf{e}_i \neq \mathbf{f}_i$.

Die Koordinaten eines Punkt bzw. Vektors transformieren sich kontragredient zur Transformation der Basisvektoren.

Die Reihenfolge und der Fixpunkt sind zu beachten, wie schon vorher (Kapitel 3) erklärt.

Für die Transformation des Punkts ist das Inverse anzuwenden.
Beispiel: Für Koordinatensystem **D T**, dann für Punkt $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}^{-1}$
Im Fall **T D** ist eine Zusammenfassung in 1 Matrix möglich (siehe Kapitel 3).

♦ **Vorgehen, wenn ein System 1 und ein transformiertes System 2 gegeben sind.**

> *Eine übliche Angabe lautet*:
> "Zum System **1** existiert ein System **2**, das gegenüber **1** um **v** verschoben und um α gedreht ist."

Zwei Voraussetzungen gelten dann immer:

- Die Koordinatenangaben von **v** benutzen die Basis von **1**.
- α wird mit "+" für eine Drehung im Gegenuhrzeigersinn eingesetzt.

Nützlich ist eine Zusatzannahme:

- System **1** und **2** sind beide orthonormiert.

{Natürlich gibt es auch nicht orthonormierte Basissysteme. Die dann komplexere Behandlung wird hier nicht mehr besprochen. Für einen linearen Zusammenhang zwischen $\{\mathbf{e}_i\}$ und $\{\mathbf{f}_i\}$ wurde das im Teil "Lineare Algebra, V06" detailliert ausgeführt. Translationen sind darin nicht enthalten. Mit Translationen erlauben erst die homogenen Koordinaten eine einfachere Beschreibung.}

Der Text der Angabe enthält üblicherweise nicht eine Reihenfolge, "erst Translation, dann Rotation", sondern beschreibt die vorhandene geometrische Beziehung. {In R^2 hätte man einfach zwei verschiedene Koordinatensysteme gezeichnet.}

> Welche Reihenfolge ist dann richtig, **T D p** oder **D T p**?
> {Prinzipiell gilt das auch für die "konventionelle" Beschreibung mit den üblichen, inhomogenen Koordinaten!}

Am einfachsten untersucht man die Transformation für den Ursprung von **1**.

T D dreht zuerst den Ursprung in **1**, ändert also nichts. Dann wird der Ursprung an die Position für **2** verschoben.

Bei **D T** wird der Ursprung zwar anfangs an die gewünschte Position verschoben, dann aber an einen anderen Ort weggedreht.

T D beschreibt die gewünschte Transformation des Koordinatensystems. Ein Punkt wird kontragredient transformiert.

So findet man:

➔ Für eine Verschiebung **v** (angegeben in Koordinaten von 1) und einen Drehwinkel α (System **2** relativ zu System **1**) gilt für die Transformation eines Punkts p mit den Koordinaten in **1**: Die Koordinaten in **2** folgen aus $\mathbf{p}(\underline{2}) = \mathbf{D}^{-1}(\alpha)\ \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{v})\ \mathbf{p}(\underline{1})$.
Weil $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{T}(-\mathbf{v})$ und $\mathbf{D}^{-1}(\alpha) = \mathbf{D}(-\alpha)$ ist dazu äquivalent: $\mathbf{p}(\underline{2}) = \mathbf{D}(-\alpha)\ \mathbf{T}(-\mathbf{v})\ \mathbf{p}(\underline{1})$.

♦ *Beispiel*

Es liegen zwei orthonormierte Basissysteme vor. System **2** ist gegenüber **1** um $\mathbf{v} = \binom{4}{5}$ verschoben und um 30° gedreht.

Nach der vorausgesetzten Konvention: $\binom{4}{5}$ ist eine Koordinatenangabe in **1**.

Gegeben: **P**(2|4) in **1**; **Q**(-2|3) in **2**
Gesucht: a) **P** in **2**, b) **Q** in **1**

c) Zusatzfrage: Wie ist die Koordinatenangabe von **v** im System **2**?

d) Zusatzaufgabe: System **1**, wie vorher, um $\mathbf{v} = \binom{4}{5}$ verschoben. Punkt **U**(2|6,5) in **1**. Um welchen Winkel müsste System **2** gedreht werden, damit **U** in **2** auf der x-Achse liegt? Welche Koordinaten hat dann **U**? (Erleichterung der Rechenarbeit: Bekannt ist, dass der Winkel $\alpha \neq 90°$)

a) **p(1)** → **p(2)**

"D T" kann nicht sofort zusammengefasst in einer Matrix angegeben werden.

D(-30°) = $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **T**(-**v**) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **p**(**1**) = $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

⇒ **p**(**2**) = **D**(-α) **T**(-**v**) **p**(**1**) ≈ $\begin{pmatrix} -2{,}23 \\ 0{,}134 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) **p(2)** → **p(1)**

Für die Umkehrung verwenden wir die erste Formel.

{Möglich ist auch eine direkte Herleitung, aber so sieht man deutlich den Vorteil der Matrizen.}

$\mathbf{T}^{-1}(-\mathbf{v})\, \mathbf{D}^{-1}(-\alpha)\, \mathbf{p}(\mathbf{2}) = \mathbf{T}^{-1}(-\mathbf{v})\, \mathbf{D}^{-1}(-\alpha)\, \mathbf{D}(-\alpha)\, \mathbf{T}(-\mathbf{v})\, \mathbf{p}(\mathbf{1}) = \mathbf{p}(\mathbf{1})$

$\mathbf{T}^{-1}(-\mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{v})$ und $\mathbf{D}^{-1}(-\alpha) = \mathbf{D}(\alpha)$.

Das Produkt **T**(**v**) **D**(α) können wir direkt in einer Matrix anschreiben.

T D(**v**, α) = $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 4 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ⇒ **p**(**1**) = **T D**(**v**, α) **p**(**2**) ≈ $\begin{pmatrix} 0{,}768 \\ 6{,}60 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) "Naheliegend" scheint vielleicht: Wenn im System **1** die Koordinaten $\binom{4}{5}$ sind, dann sind die Koordinaten im System **2** $\binom{-4}{-5}$, weil sich alles "umkehrt".

Der Denkfehler dabei ist, dass System **2** auch noch gedreht gegenüber **1** ist, wir müssen die Situation also entlang dieser gedrehten Koordinaten berechnen!

Die Verschiebung ist die Lage von **O**(0|0) in **1**, ausgedrückt in Koordinaten von **2**!

D(-α) **T**(-**v**) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ≈ $\begin{pmatrix} -5{,}96 \\ -2{,}33 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) Es gilt **p**(**2**) = **D**(-α) **T**(-**v**) **p**(**1**).

p' = **T**(-**v**) **p**(**1**) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder einfacher direkt $\begin{pmatrix} 2-4 \\ 6{,}5-5 \\ 1 \end{pmatrix}$

p(**2**) = **D**(-α) **p'** = $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos(\alpha) + 1{,}5\sin(\alpha) \\ 2\sin(\alpha) + 1{,}5\cos(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix}$

Weil **p**(**2**) auf der x-Achse liegen soll: 2 sin(α) + 1,5 cos(α) = 0

Um die trigonometrische Gleichung zu vereinfachen: cos(α) ≠ 0

2 tan(α) = -1,5 → α = -36,87°. Damit x-Koordinate: -2,5 → **U**(-2,5|0) in **2**

6. Beispiel

Es gibt ein übergeordnetes (Welt-) System **1** und ein (untergeordnetes lokales) System **2**, das gegenüber **1** um **v** = $\binom{2}{4}$ verschoben und um 60° gedreht ist.

Es gibt einen Punkt **P**, der im System **2** die Koordinaten **P**(3|5) hat.

a) Welche Koordinaten hat **P**, wenn der Punkt im System **2** um 30° um den Punkt **F**(1|4) gedreht wird?

b) Welche Koordinaten hat **P** in einem System, das gegenüber **2** um **v** = $\binom{-1}{2}$ verschoben und um -30° gedreht ist?

c) Welche Koordinaten hat **P** in einem System, das gegenüber **1** um **v** = $\binom{-1}{2}$ verschoben und um -30° gedreht ist?

a) Die Drehung eines Punkts wird mit **p'** = **D p** durchgeführt. Dabei ist der Fixpunkt aber der Ursprung des Koordinatensystems **2**! Um **D** für den gegebenen Fixpunkt zu verwenden, wird zuerst so verschoben, dass **F** im Ursprung liegt. Dann erfolgt die Drehung, und weil wir das Ergebnis im System **2** benötigen, wieder zurücktransformiert.

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; Mit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ entsteht ein verschobenes System **3**, in dem **F** im Ursprung liegt.

$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Insgesamt $\mathbf{p'} = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{D}\,\mathbf{T}\,\mathbf{p} \approx \begin{pmatrix} 2{,}23 \\ 5{,}87 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Es ist explizit ein System **3** definiert.

$\mathbf{p'} = \mathbf{D}(-\alpha)\,\mathbf{T}(-\mathbf{v})\,\mathbf{p} = \mathbf{D}(+30°)\,\mathbf{T}(-\mathbf{v})\,\mathbf{p}$

{**D T** kann nicht "einfach manuell" zusammengefasst werden, wie **T D**.}

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p'} \approx \begin{pmatrix} 1{,}96 \\ 4{,}60 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Hier muss zuerst in **1** und anschließend in **3** transformiert werden.

2 ist gegenüber **1** um $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ verschoben und um 60° gedreht,

also ist **1** gegenüber **2** um $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ verschoben und um -60° gedreht.

Für den Punkt gilt dann $\mathbf{p'} = \mathbf{D}(60°)\,\mathbf{T}(-\mathbf{v})\,\mathbf{p}$.

{**p'** hat eine Koordinatendarstellung bezüglich **1**}

Dann die Transformation von **1** nach **3**; gedreht um -30° und verschoben um $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Für den Punkt damit $\mathbf{p''} = \mathbf{D}(30°)\,\mathbf{T}(-\mathbf{w})\,\mathbf{p'} = \mathbf{D}(30°)\,\mathbf{T}(-\mathbf{w})\,\mathbf{D}(60°)\,\mathbf{T}(-\mathbf{v})\,\mathbf{p}$.

{"Zur Vollständigkeit" die einzelnen Matrizen}

$\mathbf{D}(30°) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{T}(-\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{D}(60°) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{T}(-\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zwischenresultat $\mathbf{p'} \approx \begin{pmatrix} -5{,}29 \\ 8{,}83 \\ 1 \end{pmatrix}$ {Punkt in **1**}

Endresultat $\mathbf{p''} \approx \begin{pmatrix} -7{,}13 \\ 3{,}77 \\ 1 \end{pmatrix}$ {Punkt in **3**}

Anmerkung: Falls man das durch ein Skizze kontrolliert: Bei der Verschiebung der Achsen von **1** mit +**w** beachten, dass diese in Richtung der gedrehten Achsen von **1** erfolgt. Es zeigt sich dann auch, dass **3** durch Drehung um 90° aus **2** entsteht.

Es ist auch $\mathbf{D}(30°)\,\mathbf{T}(-\mathbf{w})\,\mathbf{D}(60°)\,\mathbf{T}(-\mathbf{v})$ gleich $\mathbf{D}(90°) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$!