Transformation - 3

Wiederholung und spezielle Angaben im Zusammenhang mit Kreis-Berechnungen

1. Problemstellung

Im Zusammenhang mit der Berechnung von Schnittflächen kann es sinnvoll sein, die Berechnung von Schnittpunkten in einer speziellen Anordnung durchzuführen. Beispiel: Zwei Kreise werden auf der x-Achse angeordnet. Für das Endresultat werden die Schnittpunkte wieder an die Original-Geometrie angepasst.

Hier werden die Transformationen durch Translationen und Drehungen in R^2 diskutiert. Als geometrische Objekte werden der Punkt und die Gerade behandelt. Vorausgesetzt wird ein kartesisches Koordinatensystem.

! Für "übliche" Anwendungen in der Geometrie ist es sinnvoll, bei Transformationen eine gleiche Skalierung der Basisvektoren anzunehmen. Eine Transformation kann nur die Lage und Orientierung ändern, aber nicht die Länge. Keine Probleme, z.B. bei der Berechnung von Winkeln, treten auf, wenn alle Basisvektoren die Länge 1 haben.

Für einen Punkt sind die durchzuführenden Rechenschritte unmittelbar einsichtig. Für eine Gerade sind etwas mehr Überlegungen notwendig.

2. Translation (Punkt)

Ein Punkt ist durch die Koordinaten **P**(x|y) oder den Ortsvektor $\mathbf{p} = \binom{x}{y}$ definiert. Die Translation verschiebt den Punkt, aber eine Drehung ist nicht zugelassen.

2.1. Translation des Punkts

Eine Translation sei durch $\underline{\mathbf{T}}$ gekennzeichnet.

Die Berechnungsvorschrift ist $\underline{\mathbf{T}}$ **P**(x|y) bedeutet: Addiere die Koordinaten eines zweiten Punkts **Q**(a|b) gemäß $\underline{\mathbf{T}}$ P = **P'**(x+a|y+b).

Eleganter bzw. sinnvoller ist die Vektorformulierung $\underline{\mathbf{T}}\,\mathbf{p} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$.

Eine wiederholte Translation ist einfach durch eine wiederholte Addition durchführbar.

$\underline{\mathbf{T}}_1\,\underline{\mathbf{T}}_2\,\mathbf{p} = \mathbf{p} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$

Die Verknüpfung ist kommutativ $\underline{\mathbf{T}}_1\,\underline{\mathbf{T}}_2\,\mathbf{p} = \underline{\mathbf{T}}_2\,\underline{\mathbf{T}}_1\,\mathbf{p}$

2.2. Translation des Koordinatensystems

Ein Punkt P ist in einem Ausgangssystem gegeben, z.B. dem üblichen kartesischen Koordinatensystem. Nun wird ein zweites mit q verschobenes System betrachtet. Der durch q beschriebene Punkt ist dann der Ursprung des neuen Systems. Gesucht sind die Koordinaten von **P** in diesem neuen System. Zur Unterscheidung nennen wir den Punkt **P'**. (Es ist immer noch dasselbe Objekt, nur die Koordinatendarstellung ist verschieden!)

Eine Translation $\underline{\mathbf{T}}$ für das Koordinatensystem führt zu einer Translation $\underline{\mathbf{T}^{-1}}$ für die Koordinaten des Punkts. $\underline{\mathbf{T}^{-1}}$ ist als Rechenoperation die Subtraktion von **q**.

2.3. Beispiel

$\mathbf{p} = \binom{2}{4}$; $\mathbf{q} = \binom{6}{5}$

a) Verschiebung des Punkts um **q**: $\underline{\mathbf{T}}\,\mathbf{p} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = \binom{8}{9}$

b) Das Koordinatensystem soll so verschoben werden, dass der neue Ursprung **O**'(0|0) die Koordinaten (6|5) im alten System hat; gesucht ist die Koordinatendarstellung **P'** im neuen System: $\underline{\mathbf{T}^{-1}}\,\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{q} = \binom{2-6}{4-5} = \binom{-4}{-1} = \mathbf{p}'$

c) ("Kontrolle") Umkehrung von b). **P'**(-4|-1) im neuen System, gesucht Koordinatendarstellung **P** im alten System: Die Verschiebung ist jetzt **q'** = $\binom{-6}{-5}$!

$\underline{\mathbf{T}^{-1}}\,\mathbf{p'} = \mathbf{p'} - \mathbf{q'} = \binom{-4-(-6)}{-1-(-5)} = \binom{2}{4} = \mathbf{p}$

3. Translation (Gerade)

Für die Gerade betrachten wir die Normalform, y = kx +c, und die Parametergleichung, $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{u}$.

Vor einer Rechnung wird anschaulich klar, dass eine Verschiebung die Steigung der Geraden nicht ändern kann! k in der Normalform und der Richtungsvektor **u** in der Parametergleichung bleiben als unverändert.

3.1. Translation der Geraden

In der *Parametergleichung* ist die Rechnung ganz einfach:

$\mathbf{x_0}$ ist ein Punkt. Damit $\underline{\mathbf{T}}\,\mathbf{x_0} = \mathbf{x_0} + \mathbf{q}$ und als Gleichung der verschobenen Geraden
$\mathbf{x'} = \mathbf{x_0'} + t\mathbf{u}$ mit $\mathbf{x_0'} = \mathbf{x_0} + \mathbf{q}$ (gerechnet im Ausgangssystem).

Eventuell taucht die Frage auf, warum man nicht auch links transformiert, also "**x** + **q**" bildet. Dazu muss man die Gleichung richtig "lesen". **x'** ist ein allgemeiner Punkt, mit Koordinaten im gleichen Achsensystem wie die Größen auf der rechten Seite. Durch "+ **q**" wurden alle Punkte der Geraden gleichartig verschoben, das Achsensystem ist dasselbe. Der allgemeine Punkt muss also nicht zusätzlich verschoben werden, das neue "$\mathbf{x_0'} = \mathbf{x_0} + \mathbf{q}$" enthält schon die Verschiebung.

Dass **u** unverändert bleibt, ist neben der Anschauung schnell auch formal gezeigt.
Der Richtungsvektor ist auch die Differenz der Ortsvektoren zweier Punkte, $\mathbf{u} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1}$.
Wenn beide Punkte verschoben werden, ist $\underline{\mathbf{T}}\,\mathbf{u} = \mathbf{p_2} - \mathbf{q} - \mathbf{p_1} + \mathbf{q} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1}$.

In der *Normalform* y = kx + c verändert die Verschiebung die x- und die y-Koordinate.
x' = x + a und y' = y + b. Eingesetzt folgt (y' - b) = k (x' - a) + c.
Geordnet ist das y' = k x' + c + b - k·a. Wie erwartet hat die verschobene Gerade die gleiche Steigung k, aber einen anderen Achsenabschnitt c' = c + b - k·a.

3.2. Translation des Koordinatensystems

Wie beim Punkt ist die Berechnung einfach die Umkehrung.
Anstelle von + **q** für $\underline{\mathbf{T}}$ wird - **q** für $\underline{\mathbf{T}}^{-1}$ gerechnet.
$\mathbf{x'} = \mathbf{x_0'} + t\mathbf{u}$ mit $\mathbf{x_0'} = \mathbf{x_0} - \mathbf{q}$
y' = k x' + c' mit c' = c - b + k·a.

3.3. Beispiel

Gerade g: $\mathbf{x} = \binom{2}{4} + t\binom{1}{5}$

Normalform (bzw. Koordinatengleichung) dazu:

(1) x = 2 + t → t = x - 2
(2) y = 4 + 5 t = 5 x - 6 (bzw. 5x - y - 6 = 0)

a) Verschiebung um $\mathbf{q} = \binom{a}{b} = \binom{-3}{4}$

c' = c + b - k·a = -6 + 4 - 5·(-3) = 13 ⇒ verschobene Gerade: g': y' = 5 x' + 13

$\mathbf{x_0'} = \mathbf{x_0} + \mathbf{q} = \binom{2-3}{4+4}$ ⇒ verschobene Gerade: g': $\mathbf{x'} = \binom{-1}{8} + t\binom{1}{5}$

(Die Verschiebung ändert nicht den Richtungsvektor der Geraden!)

b) Verschiebung des Koordinatensystems. Der neue Ursprung **O'**(0|0) hat die Koordinaten (3|-7) im alten System.

c' = c - b + k·a = -6 -(-7) + 5·3 = 16 ⇒ Gerade in verschobenen System: g': y' = 5 x' + 16

$\mathbf{x_0'} = \mathbf{x_0} - \mathbf{q} = \binom{2-3}{4-(-7)}$ ⇒ Gerade im verschobenen System: g': $\mathbf{x'} = \binom{-1}{11} + t\binom{1}{5}$

c) ("Kontrolle") Umkehrung von b). g' im neuen System gegeben, gesucht Koordinatendarstellung g im alten System: Die Verschiebung ist jetzt $\mathbf{q'} = \binom{-3}{7}$!

g': y' = 5 x' + 16. c = c' - b' + k·a' = 16 - 7 + 5·(-3) = -6 ⇒ im alten System: g: y = 5 x - 6 ☑

$\mathbf{x_0} = \mathbf{x_0'} - \mathbf{q'} = \binom{-1-(-3)}{11-7)}$ ⇒ im alten System: g: $\mathbf{x} = \binom{2}{4} + t\binom{1}{5}$ ☑

4. Drehung (Punkt)

Eine Drehung wird durch **D p** beschrieben.

Zur eindeutigen Unterscheidung von der Translation **T** verwenden wir **D**. Für **D** gelten die für eine Matrix üblichen Operationen.

Drehung um den Winkel α (im Gegenuhrzeigersinn, mathematisch "positiv"):

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Das Inverse $\mathbf{D}^{-1}$ entspricht einer Drehung um -α. Mit cos(-α) = cos(α) und sin(-α) = -sin(α)

$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

! Die Drehung erfolgt dabei um den Ursprung des Koordinatensystems!
(Das wird wichtig, wenn die Kombination aus Translation und Rotation betrachtet wird.)

4.1 Drehung eines Punkts

p' = D p

Durch Umkehrung entstehen wieder die Ausgangskoordinaten:

$\mathbf{D^{-1}\, p' = D^{-1}\, D\, p = E\, p = p}$

Für eine Drehung um α_1 und dann um α_2 gilt die Matrixmultiplikation $\mathbf{D_2\, D_1\, p}$.

Anschaulich ist einsichtig: $\mathbf{D_2\, D_1\, p = D_1\, D_2\, p = D_{12}\, p}$ mit $\mathbf{D_{12}}$ zum Winkel $\alpha_1 + \alpha_2$.

(Durch explizite Rechnung lässt sich das, unter Verwendung der Additionstheoreme, auch überprüfen.)

$(\mathbf{D_1} + \mathbf{D_2})$ p entspricht <u>nicht</u> einer Drehung um α_2 und dann um α_1!

4.2. Drehung des Koordinatensystems

Wenn das Koordinatensystem um +α gedreht wird, ist eine Drehung des Punkts um -α dazu äquivalent.

4.3 Beispiel

P(3|5); $\alpha_1 = \pi/6$ (30°)

Drehung Punkt um 30°

$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p'} = \mathbf{D_1\, p} \approx \begin{pmatrix} 0{,}0981 \\ 5{,}830 \end{pmatrix}$

Drehung Koordinatensystem um 30° - angewandt auf den vorher gedrehten Punkt - liefert Ausgangskoordinaten

$\mathbf{D_1}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = \mathbf{D_1\, p'} \approx \binom{3}{5}$

$\alpha_2 = \pi/3$ (60°)

$\mathbf{D_2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{D_1\, D_2 = D_2\, D_1 = D_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv$ Drehung 90°

ABER: $(\mathbf{D_1} + \mathbf{D_2})\,\mathbf{p} \approx \begin{pmatrix} -2{,}732 \\ 10{,}93 \end{pmatrix}$ entspricht <u>nicht</u> der Drehung um 30° + 60°!

5. Drehung (Gerade)

Eine Möglichkeit ist natürlich, zwei Punkte auf der Geraden zu errechnen, diese zu drehen und daraus die neue Geradendarstellung zu errechnen.

5.1 Drehung der Geraden

Einfacher zu behandeln ist die *Parametergleichung*.

Für den allgemeinen Punkt **x** gilt $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\,\mathbf{u}$. Die Drehung dafür ist **D x**.

Eingesetzt: $\mathbf{D\,x} = \mathbf{D}\,(\mathbf{x_0} + t\,\mathbf{u}) = \mathbf{D\,x_0} + t\,\mathbf{D\,u}$

Damit haben wir die Parameterform nach der Drehung $\mathbf{x'} = \mathbf{x_0'} + t\,\mathbf{u'}$

(mit $\mathbf{x_0'} = \mathbf{D\,x_0}$ und $\mathbf{u'} = \mathbf{D\,u}$)

Den Ausdruck in der *Normalform* erhalten wir daraus durch Elimination von t.

Allgemein ergibt sich für y = k x + c: $y' = \frac{k\cdot\cos(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-k\cdot\sin(\alpha)}\,x' + \frac{c}{\cos(\alpha)-k\cdot\sin(\alpha)}$

Eine alternative Herleitung wendet die Drehung auf die Koordinatendarstellung des allgemeinen Punkts an.

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ k\,x + c \end{pmatrix}$; **x** wird gedreht. $\mathbf{x'} = \mathbf{D\,x}$.

explizit: $\mathbf{x'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ k\,x + c \end{pmatrix}$

(1) x' = x cos(α) - k x sin(α) - c sin(α) und

(2) y' = x sin(a) + k x cos(a) + c cos(a) = x { sin(α) + k cos(α) } + c cos(α)

Aus (1): x = { x' + c sin(α) } / { cos(α) - k sin(α) }

x in (2) eingesetzt: y' = { x' + c sin(α) } { sin(α) + k cos(α) } / { cos(α) - k sin(α) } + c cos(α)

→ y'{ cos(α) - k sin(α) } =

= x' sin(α) + k x' cos(α) + c $\sin^2(\alpha)$ + k c sin(α) cos(α) + c $\cos^2(\alpha)$ - k c cos(α) sin(α)

= x' { sin(α) + k cos(α) } + c

→ geordnet für y' der vorher angegebene Ausdruck

5.2. Drehung des Koordinatensystems

Anstelle des Anschreibens neuer Formeln benutzen wir einfach, dass eine Drehung des Koordinatensystems um + α als Drehung des Objekts (Gerade) um -α zu berechnen ist.

5.3 Beispiel

Gerade g: y = 4 x - 1 oder (äquivalent) $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\,\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gesucht ist die Darstellung der Geraden in einem um 30° gedrehten Koordinatensystem.

Dafür wird die Drehung des Objekts um -30° = -π/6 berechnet.

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{D\,x_0} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} + 7/2 \\ -1 + 7\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5{,}232 \\ 5{,}062 \end{pmatrix}$; $\mathbf{D\,u} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 + 2 \\ -1/2 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}866 \\ 2{,}964 \end{pmatrix}$

Parametergleichung im gedrehten Koordinatensystem: $\mathbf{x'} = \mathbf{x_0'} + t\,\mathbf{u'} = \begin{pmatrix} 5{,}232 \\ 5{,}062 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2{,}866 \\ 2{,}964 \end{pmatrix}$

Normalform y' = k' x' + c'; Lösungsformel $k' = \frac{k\cdot\cos(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-k\cdot\sin(\alpha)}$; $c' = \frac{c}{\cos(\alpha)-k\cdot\sin(\alpha)}$

k' = { 4 $\sqrt{3}$/2 - 1/2 } / { $\sqrt{3}$/2 + 4 1/2 } ≈ 1,034; c' = -1 / { $\sqrt{3}$/2 + 4 1/2 } ≈ -0,349

g': y' = 1,034 x' - 0,349

Normalform, explizite Rechnung

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ k\,x + c \end{pmatrix}$; gedreht. $\mathbf{x'} = \mathbf{D\,x} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ k\,x + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ k\,x + c \end{pmatrix}$

(1) x' = $\sqrt{3}/2$ x + (1/2) 4 x + (1/2) (-1) = ($\sqrt{3}/2$ +2) x - 1/2

→ x = (x' + 1/2) / ($\sqrt{3}/2$ + 2) ≈ 0,349 x' + 0,174

(2) y' = (-1/2) x + $\sqrt{3}/2$ 4 x + $\sqrt{3}/2$ (-1) = ($\sqrt{3}$ - 1)/2 x - $\sqrt{3}$/2 ≈ 2,964 x - 0,866

→ y' = 2,964 · 0,349 x' + 2,964 · 0,174 - 0,866 = 1,034 x' -0,349

6. Drehung und Translation

Zwei Dinge sind zu beachten.

1. Man sollte sich stets auf dasselbe Koordinatensystem beziehen - außer man berücksichtigt dies (umständlicher) in der Rechnung.

2. *WICHTIG!* Es muss beachtet werden, dass die Drehung stets um den Ursprung des benutzten Koordinatensystems erfolgt - wenn die vorher angegebene Formel für **D** benutzt.

6.1. Vorgehen

Gleichartige Behandlung für das Objekt "Punkt" oder "Gerade". Beim Punkt werden neue Koordinaten gesucht, bei der Gerade eine neue Darstellung (Normalform oder Parametergleichung)

1. Ein Objekt ist im Originalsystem gegeben. Gesucht ist die Darstellung in einem System, das um **q** verschoben ist und darin um α gedreht.
   $\rightarrow$ Zuerst die Verschiebung, dann die Drehung! Formal: $\mathbf{D}\ \underline{\mathbf{T}}$ Objekt.
2. Ein zweites System ist um **q** verschoben und um α gedreht - relativ zum Ausgangssystem. Gesucht ist die Darstellung eines darin gegebenen Objekts im Originalsystem.
   $\rightarrow$ Zuerst die Drehung um den Winkel $-\alpha$ (damit hat das gedrehte System dieselbe Orientierung wie das Originalsystem). Dann die Verschiebung um **-q**. Formal: $\underline{\mathbf{T}}^{-1}\ \mathbf{D}^{-1}$ Objekt.

Kann man **D** und $\underline{\mathbf{T}}$ vertauschen? NEIN! Bei $\mathbf{D}\ \underline{\mathbf{T}}$ erfolgt die Drehung um den Ursprung des verschobenen Systems, bei $\underline{\mathbf{T}}\ \mathbf{D}$ würde die Drehung um den Ursprung des Originalsystems erfolgen!

Elemente gleichen Typs können zusammengefasst werden - wenn sie direkt aufeinander folgen. Beispiel: $\underline{\mathbf{T}}_1$ (mit $+\mathbf{q}_1$), $\underline{\mathbf{T}}_{2'}$ (mit $+\mathbf{q}_2$), $\mathbf{D}_1$(mit α_1), $\mathbf{D}_2$ (mit α_2)

$\underline{\mathbf{T}}_1\ \underline{\mathbf{T}}_2\ \mathbf{D}_2\ \mathbf{D}_1$ Objekt $\equiv \underline{\mathbf{T}}_{12}\ \mathbf{D}_{12}$ Objekt; $\underline{\mathbf{T}}_{12}$ {mit $+(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)$}, $\mathbf{D}_{12}$ {mit $(\alpha_1 + \alpha_2)$}

6.2 Beispiele

(jeweils Originalsystem und ein spezielles System, das gegenüber dem Originalsystem verschoben und gedreht ist)

1. Punkt im Originalsystem **P**(3|-4). Das spezielle System ist um $\mathbf{q} = \binom{2}{5}$ verschoben und um den Winkel $\alpha = +30°$ gedreht. Gesucht: **P'** im speziellen System.
Zuerst die Translation, dann die Drehung!

(Nach der Translation ist der Ursprung des neuen System **O'**(0|0) und die Drehung erfolgt korrekt.)

Verschiebung: $\mathbf{p_V} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = \binom{5}{1}$

Drehung: $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p'} = \mathbf{D}\ \mathbf{p_V} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{3}/2 - 1/2 \\ 5/2 + \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \approx \binom{3{,}830}{3{,}366}$

Zur "Kontrolle" Rücktransformation: Jetzt muss zuerst gedreht werden!

Drehung um -30°: $\mathbf{D'} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}866 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p_D} = \binom{5}{1}$

Verschiebung: $\mathbf{p} = \mathbf{p_V} - \mathbf{q} = \binom{3}{-4}$ ☑

2. Das spezielle System ist um $\mathbf{q} = \binom{2}{-3}$ verschoben und um den Winkel $\alpha = +60°$ gedreht. Im speziellen System ist eine Gerade g: $\mathbf{x} = \binom{-1}{4} + t\binom{5}{6}$. Gesucht Geradengleichung im Originalsystem.

Zuerst Drehung um -60°: $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; $\approx \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}866 \\ -0{,}866 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

$\mathbf{x_{oD}} = \mathbf{D}\ \mathbf{x_o} = \begin{pmatrix} -0{,}5 + 3{,}464 \\ 0{,}866 + 2 \end{pmatrix} = \binom{2{,}964}{2{,}866}$; $\mathbf{u_D} = \begin{pmatrix} 2{,}5 + 5{,}196 \\ -4{,}33 + 3 \end{pmatrix} = \binom{7{,}696}{-1{,}33}$

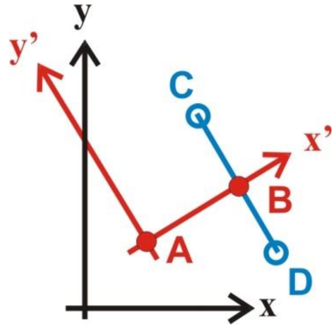
Verschoben um **-q**: $\mathbf{x}_{0V} = \begin{pmatrix} 0{,}964 \\ 5{,}866 \end{pmatrix}$; $\mathbf{u}_V$: Die Verschiebung ändert <u>nicht</u> den Richtungsvektor!

Gerade im Originalsystem: g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0{,}964 \\ 5{,}866 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7{,}696 \\ -1{,}33 \end{pmatrix}$

<u>**3.**</u> Gegeben 2 Punkte im Originalsystem. **A**(2|3), **B**(4|7). Dazu liegt ein spezielles System vor. Darin ist **A'**(0|0) - also der Ursprung des speziellen Systems. **B'** soll auf der x-Achse des speziellen Systems liegen. In diesem speziellen System gibt es zwei weitere Punkte **C'** und **D'**, die parallel zur y-Achse von **B'** den Abstand 3 haben. Gesucht sind **C** und **D** im Originalsystem.

(Eine ähnliche Rechnung kann bei der Berechnung der Schnittpunkte zweier Kreise vorkommen.)

Eventuell "hilfreich": Skizze zur Erklärung



C und **D** liegen immer symmetrisch zu **B**.

Im speziellen System sind die Punkte aber schneller berechenbar!

Weil aus **A**(2|3) {Originalsystem} **A'**(0|0) {spezielles System} ist die Verschiebung $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Richtung $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ soll im speziellen System in Richtung x'-Achse sein.
Dafür ist α der Winkel zwischen (**b** - **a**) und der x-Achse {Originalsystem}.

$\cos(\alpha) = (\mathbf{b} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{e}_X / |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$; $|\mathbf{e}_X| = 1$.

$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $|\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{20}$; $(\mathbf{b} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{e}_X = 2$; $\cos(\alpha) = 1/\sqrt{5}$

{a = 63,44°} Wir berechnen $\sin(\alpha) = \{ 1 - 1/5\}^{1/2} = 2/\sqrt{5}$.

Das Koordinatensystem wird um α gedreht: $\mathbf{D}^{-1} \equiv \mathbf{D}$ (für $-\alpha$) auf Punkt anwenden.

$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Zuerst die Translation speziell nach Original: $\mathbf{b}_V = \mathbf{b} - \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\{\mathbf{a}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Drehung: $\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{b}_v = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} + 8/\sqrt{5} \\ -4/\sqrt{5} + 4/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{20} \\ 0 \end{pmatrix}$

B' hat wie gefordert die y-Koordinate 0.
Für die Berechnung der Punkte **C** und **D** ist die x-Koordinate bekannt. Parallel zur y-Achse und mit dem Abstand 3 von **B'** sind $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{20} \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \sqrt{20} \\ -3 \end{pmatrix}$

Für die Rücktransformation aus dem speziellen in das Originalsystem wird zuerst gedreht.
Als Umkehrung von vorher: Drehung des Koordinatensystems um $-\alpha$.
{Drehung des Punktes um $+\alpha$}

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$\mathbf{D}\,\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 - 6/\sqrt{5} \\ 4 + 3/\sqrt{5} \end{pmatrix}$; $\mathbf{D}\,\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 + 6/\sqrt{5} \\ 4 - 3/\sqrt{5} \end{pmatrix}$; und mit der Verschiebung + $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 - 6/\sqrt{5} \\ 7 + 3/\sqrt{5} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}32 \\ 8{,}34 \end{pmatrix}$; $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 4 + 6/\sqrt{5} \\ 7 - 3/\sqrt{5} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6{,}68 \\ 5{,}66 \end{pmatrix}$

<u>*Anmerkung*</u>:
Neben einer (etwas genaueren) Skizze kann man auch rechnerisch überprüfen,
z.B. $(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \perp (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \rightarrow \begin{pmatrix} -2{,}68 \\ 1{,}34 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ ☑ und $\{\text{Länge}(\mathbf{c} - \mathbf{b})\}^2 = 2{,}68^2 + 1{,}34^2 \approx 9$ ☑.

Wenn es nur auf das Resultat ankommt und nicht auf den Rechenweg, ist auch nach Blick auf die Anordnung eine Lösung ganz einfach möglich.

(**b** - **a**) = $\binom{2}{4}$ aus den gegebenen Punkten; (**c** - **b**) ist orthogonal dazu; ein orthogonaler Vektor ist in R^2 sofort angebbar ("Vertauschung, Vorzeichenwechsel"): $\binom{-4}{2}$ und weil nur die Richtung interessiert $\binom{-2}{1}$; (**c** - **b**) = λ $\binom{-2}{1}$ mit Länge^2 = 5 λ^2; weil diese nach Aufstellung 3 ist:
→ λ = $3/\sqrt{5}$ → **c** = **b** + λ $\binom{-2}{1}$ = $\binom{4}{7}$ + $\begin{pmatrix} -6/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ und analog für **d**.

7. Ergänzung zu "Drehung und Translation"

Bei der **Berechnung** der **Schnittpunkte zweier Kreise** kann ein "spezielles" Koordinatensystem verwendet werden. Darin ist der Rechenaufwand geringer. Wenn nur die Schnittfläche gesucht ist, ist das sinnvoll. Möglich ist aber auch eine Rücktransformation in das Originalsystem.

$\mathbf{M_1}$ wird in den Nullpunkt verschoben; das ist eine Translation.

Im speziellen System: $\mathbf{M_1}$(0|0)

Im Original-Koordinatensystem liegt $\mathbf{M_2}$ im Abstand d auf der Verbindungsachse **d** = $\overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}}$**.**
Das Originalsystem ist um einen Winkel α relativ zur x-Achse gedreht. α, wie üblich, im Uhrzeigersinn angegeben. Es wird so gedreht, dass im speziellen System dann der Mittelpunkt $\mathbf{M_2}$ auf der x-Achse liegt.

Im speziellen System: $\mathbf{M_2}$(d|0)

Vorhanden seien als Ergebnis die Schnittpunkte $\mathbf{S_{1,2}}$ im speziellen System.

<u>*Gesucht*</u>: Schnittpunkte $\mathbf{S_{1,2}}$ im Originalsystem

<u>*Durchführung*</u>:

Zuerst wird gedreht, dann wird durch Translation der Ursprung verschoben.

$\mathbf{s}_{1,2}$ sind die Ortsvektoren der Schnittpunkte $\mathbf{S_{1,2}}$.

- Drehung. Eine Drehung um den Winkel α sei durch die Matrix **T** beschrieben. {Das dreht einen Punkt im speziellen System in das Originalsystem.}
  $\mathbf{s_i'} = \mathbf{T}\, \mathbf{s}_i$(speziell); $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$
  {Für s' liegt dieselbe Orientierung wie im Originalsystem vor, nur der Nullpunkt ist noch verschoben.}
- Translation von (0|0) nach $\mathbf{M_1}$ durchführen.
  $\mathbf{s}_i$ (Original) = $\mathbf{s}_i'$ + $\mathbf{m}_1$(Koordinaten im Originalsystem)

Für die Ausdrücke mit α benutzen wir das Skalarprodukt: $\mathbf{d} \cdot \mathbf{e_x} = d \cdot 1 \cdot \cos(\alpha)$
sin(α) kann man am einfachsten aus $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = 1$ erhalten.

$\mathbf{d} \cdot \mathbf{e_x} = \binom{d_x}{d_y} \cdot \binom{1}{0} = d_x \rightarrow \cos(\alpha) = d_x/d;\ \sin(\alpha) = \{ 1 - (d_x/d)^2 \}^{1/2}$

Weil wir zur Berechnung des Betrags d schon den Vektor **d** berechnet haben, kann noch kürzer geschrieben werden. Es liegt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten d (Hypothenuse), d_x und d_y vor. Damit ist $\cos(\alpha) = d_x/d$ und $\sin(\alpha) = d_y/d$.

sin(φ) nach einer kurzen Umformung:
$\{ 1 - (d_x/d)^2 \}^{1/2} = \{ (d^2 - d_x^2) / d^2 \}^{1/2} = \{ d_y^2 / d^2 \}^{1/2} = d_y/d$

Die Transformationsmatrix ist damit: $\mathbf{T} = \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} d_x & -d_y \\ d_y & d_x \end{pmatrix}$

Ausmultipliziert: $\mathbf{s'} = \mathbf{T}\, \mathbf{s} = \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} d_x s_x - d_y s_y \\ d_y s_x + d_x s_y \end{pmatrix}$

Alternative Herleitung der Drehung

Lage des speziellen Systems im (üblichen kartesischen) Original-Koordinatensystem (kanonische Basis). Im kartesischen System zeigt die x-Achse der speziellen Systems in Richtung **d**, der Verbindungsachse der beiden Kreismittelpunkte. Die y-Achse des speziellen Systems steht auch senkrecht auf der x-Achse, weil eine Drehung diesen rechten Winkel zwischen den Achsen nicht ändert.

Die wesentliche Idee ist, dass man sich klar macht, was Komponenten bzw. Koordinaten eines Vektors bedeuten!

Die Angabe $\mathbf{a} = \binom{a}{b}$ bedeutet allgemein $\mathbf{a} = a\,\mathbf{e_x} + b\,\mathbf{e_y}$ - die Linearkombination der Basisvektoren des benutzten Koordinatensystems.

Aus der einfachen Rechnung für die Schnittpunkte haben wir Koordinaten, die sich auf die Einheitsvektoren $\mathbf{f_{x,y}}$ des speziellen Systems beziehen.

Wenn wir die Koordinatendarstellung der Einheitsvektoren $\mathbf{f_{x,y}}$ im Originalsystem berechnen, können wir auch die Koordinaten von **s** im Originalsystem berechnen.

$\mathbf{f_x}$ zeigt in Richtung **d**.

Die Koordinatendarstellung von **d** im Originalsystem ist $\binom{d_x}{d_y} = d_x\,\mathbf{e_x} + d_y\,\mathbf{e_y}$.

Der Einheitsvektor dazu entsteht durch Division durch die Länge: $\mathbf{f_x} = \frac{1}{d}\binom{d_x}{d_y}$.

$\mathbf{f_y}$ ist ein dazu senkrechter Einheitsvektor, $\mathbf{f_y} = \frac{1}{d}\binom{-d_y}{d_x}$.

Weil für orthogonale Vektoren das Skalarprodukt 0 ist {cos (90°) = 0},
sieht man, dass allgemein $\binom{-a_y}{a_x}$ senkrecht auf $\binom{a_x}{a_y}$ steht; $-a_x a_y + a_x a_y = 0$

Dies für den Schnittpunkt $\binom{s_x}{s_y}$ im speziellen System:

$$\mathbf{s'} = s_x\,\mathbf{f_x} + s_y\,\mathbf{f_y} = s_x\,\frac{1}{d}\binom{d_x}{d_y} + s_y\,\frac{1}{d}\binom{-d_y}{d_x} = \frac{1}{d}\cdot\binom{d_x s_x - d_y s_y}{d_y s_x + d_x s_y}$$

Damit haben wir, identisch zum Vorigen, die Koordinatendarstellung des Schnittpunkts im Originalsystem.

Eventuelle Kontrolle der hergeleiteten Formel

$\mathbf{M_1}(2|4)$; $\mathbf{M_2}(5|8)$

$\mathbf{d} = \binom{3}{4}$; d = 5; im "speziellen" System: $\mathbf{M_1}(0|0)$; $\mathbf{M_2}(5|0)$

$\mathbf{M_2}$ rücktransformiert:

$\mathbf{m'} = \frac{1}{5}\cdot\binom{3\cdot 5 - 4\cdot 0}{4\cdot 5 + 3\cdot 0} = \binom{3}{4}$; $\mathbf{m}$(Originalsystem) $= \binom{3+2}{4+4}$ ☑