Transformation - 2

Die Kombination von Drehung und Verschiebung als Ergänzung noch einmal, detailliert und mehr anschaulich. Gezeigt wird, dass die Reihenfolge zuerst Translation dann Rotation der einfachere Rechenweg ist. Möglich ist auch die umgekehrte Reihenfolge. Dabei ist aber bei der Translation das Zwischenergebnis des ersten Schritts zu verwenden.

<u>Aufgabe</u>:

Eine Anordnung von Punkten soll **so verschoben** werden, dass

- ein Punkt **M** hinterher **im Koordinatenursprung** liegt und
- ein zweiter Punkt **Q auf der x-Achse** liegt.

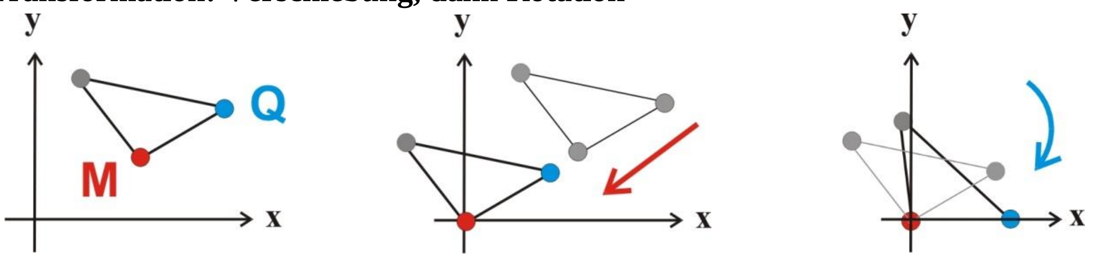
Die relative Lage aller Punkte zueinander und deren Abstände voneinander sollen natürlich gleich bleiben!

In diesem zweiten, speziellen System werden neue Punkte berechnet. Hinterher soll deren Lage im Ausgangssystem angegeben werden. Dazu ist dann die Rücktransformation in das Ausgangssystem nötig.

> **WICHTIG:**
> Hier wird deutlich unterschieden zwischen der Translation <u>**T**</u> und der Drehung **D**.
> <u>**T**</u> bedeutet, dass 2 Vektoren addiert werden.
> **D** bedeutet, dass ein Vektor mit einer Matrix multipliziert wird.
> Für eine manuelle Rechnung ist dies (verschiedene mathematische Operationen) der schnellste Weg!

Gegeben **M**(a|b), **Q**(x|y) {und eventuell auch weitere Punkte **P**(x|y)}.

1. Transformation: Verschiebung, dann Rotation



Ausgangssituation | **M** in Ursprung verschoben, <u>**T**</u> **1a** | **Q** auf x-Achse gedreht **1b**

1a Eine Translation verschiebt **M** nach **O**(0|0).

Original-Koordinaten	Verschiebung <u>**T**</u>	Neue Koordinaten
$\binom{a}{b}$	$-\binom{a}{b}$	$\binom{0}{0}$

Das muss dann auch für den Punkt **Q** durchgeführt werden.

$\binom{x}{y}$	$-\binom{a}{b}$	$\binom{x-a}{y-b}$

Die Operation "Verschiebung so, dass **M** im Ursprung liegt" ist damit durch die Ausgangskoordinaten von **M** einfach und eindeutig definiert.

1b Die durch <u>**T**</u> erzeugte Anordnung soll nun so gedreht werden, dass hinterher **Q** auf der x-Achse liegt. Das ist mit einem geeigneten Drehwinkel α möglich.

Für die Drehung gilt die Matrix **D** = $\begin{pmatrix} \mathbf{cos(\alpha)} & \mathbf{-sin(\alpha)} \\ \mathbf{sin(\alpha)} & \mathbf{cos(\alpha)} \end{pmatrix}$

M liegt jetzt im Ursprung **O**(0|0), wird also durch die Drehung nicht verändert.

Für **Q** gilt

Ausgangskoordinaten	Drehung **D**	Neue Koordinaten
$\begin{pmatrix} x-a \\ y-a \end{pmatrix}$	$\mathbf{D}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (x-a)\cos(\alpha) - (y-b)\sin(\alpha) \\ (x-a)\sin(\alpha) + (y-b)\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

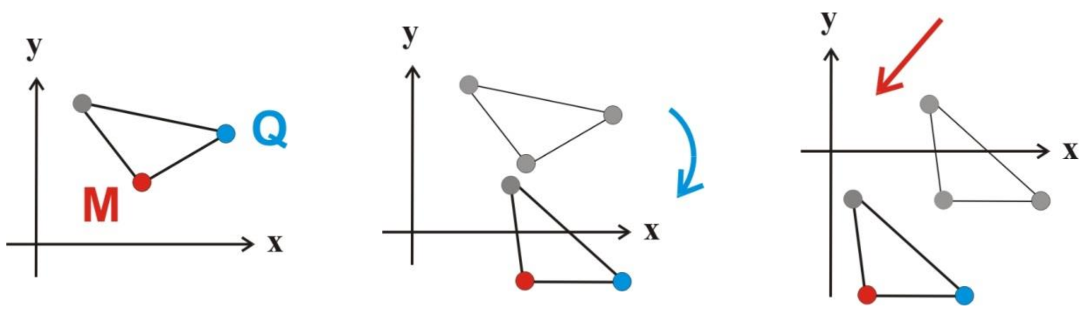
α muss so gewählt werden, dass (x-a) sin(α) + (y-b) cos(α) = 0.
{**Q** soll auf der x-Achse liegen.}

➔ Dies ist die vorgeschlagene Reihenfolge. Die Tatsache, dass eine Drehung als "Drehung um den Ursprung **O**(0|0)" definiert ist, ist dabei richtig berücksichtigt.

2. Umgekehrte Reihenfolge ($\rightarrow$ etwas umständlicher)

2a Als erstes die Drehung, um den Ursprung **O**(0|0), mit dem Winkel α.
φ ist derselbe Winkel wie in **1.**
Für die Drehung gilt wieder die Matrix **D** = $\begin{pmatrix} \mathbf{cos(\alpha)} & \mathbf{-sin(\alpha)} \\ \mathbf{sin(\alpha)} & \mathbf{cos(\alpha)} \end{pmatrix}$
Jeder Punkt, auch **M**, wird gedreht.
$\mathbf{D\ m} = \begin{pmatrix} a\cos(\alpha) - b\sin(\alpha) \\ a\sin(\alpha) + b\cos(\alpha) \end{pmatrix}$; $\mathbf{D}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

2b Als zweites die Verschiebung. Wir wenden für **Q** dasselbe $\underline{\mathbf{T}}$ wie in **1.** an.
$\underline{\mathbf{T}}\begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) - a \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) - b \end{pmatrix}$ ☒
Verglichen mit dem richtigen Resultat **1b** <u>falsche</u> <u>Koordinaten</u>!
Auch die Skizze zeigt, dass zwar "Teile" richtig sind - richtige Orientierung bezüglich der Achsen - aber die Lage falsch - **M** liegt nicht wie gefordert im Ursprung und **Q** nicht auf der x-Achse. (Die gesamte Anordnung ist verschoben.)



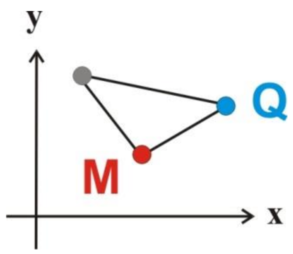
Ausgangssituation | Alle Punkte gedreht **2a** | Translation $\underline{\mathbf{T}}$, wie **1a** **2b**

2c Wenn wir völlig "nicht-mathematisch" verbal formulieren, soll der Punkt **M** mit der Verschiebung zu **O**(0|0) werden. Wir müssen die Verschiebung also nicht mit **m**, sondern mit dem Ergebnis von "**2a**" **D m** durchführen. {Also nicht **m** sondern **D m** subtrahieren!} Um Verwechslungen zu vermeiden, bezeichnen wir diese Verschiebung $\underline{\mathbf{T'}}$.
Damit für **Q**:

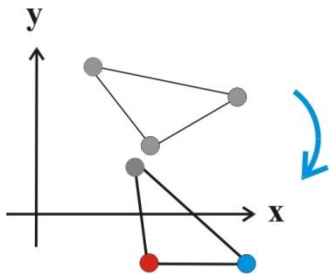
$$\underline{\mathbf{T'}}\begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) - a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) - a\sin(\alpha) - b\cos(\alpha) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} (x-a)\cos(\alpha) - (y-b)\sin(\alpha) \\ (x-a)\sin(\alpha) + (y-b)\cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ ☑}$$

M wird korrekt nach **O**(0 | 0) verschoben:

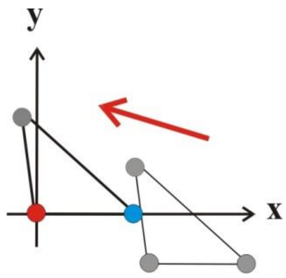
$$\underline{\mathbf{T'}}\begin{pmatrix} a\cos(\alpha) - b\sin(\alpha) \\ a\sin(\alpha) + b\cos(\alpha) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a\cos(\alpha) - b\sin(\alpha) - a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) \\ a\sin(\alpha) + b\cos(\alpha) - a\sin(\alpha) - b\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ☑}$$



Ausgangssituation



Alle Punkte gedreht
2a



andere Translation $\underline{\mathbf{T'}}$
2c

> "**2a** + **2b**" ist falsch! "**2a** + **2c**" ist richtig, aber es muss für die Verschiebung das Zwischenresultat von "**2a**" eingesetzt werden!

Hier wurde das mit der Transformation von Punkten gezeigt. In "Transformation - 1" wurde das unter Verwendung der Basisvektoren gezeigt.

> Verfahren "**1a** + **1b**" benutzt einfacher für die Verschiebung nur die bekannte Ausgangssituation; die weiteren Rechenschritte benötigen keine zusätzlichen Überlegungen.

Die Äquivalenz der Wege (1a+1b, 2a+2c) kann auch formal eingesehen werden.

Sei $\underline{\mathbf{T}} \rightarrow - \mathbf{m}$ für verschobenen Vektor
$\underline{\mathbf{T'}} \rightarrow - (\mathbf{D\,m})$ (= Ergebnis aus vorangehender Drehung) für verschobenen Vektor
$\underline{\mathbf{D}} \rightarrow$ Multiplikation Matrix $\mathbf{D} \cdot$ Vektor
$\mathbf{m} \rightarrow$ Vektor des Punkts **M**; $\mathbf{p} \rightarrow$ Vektor eines anderen Punkts (z.B. auch **Q**)

	*Anwendung auf **m***		*Anwendung auf **p***		
1a:	$\underline{\mathbf{T}}\,\mathbf{m}$	$\rightarrow \mathbf{m - m = 0}$	$\underline{\mathbf{T}}\,\mathbf{p}$	$\rightarrow \mathbf{p - m}$	
1b:	$\underline{\mathbf{D}}\,\mathbf{0}$	$\rightarrow \mathbf{D\,0} = \mathbf{0}$	$\underline{\mathbf{D}}\,\mathbf{(p - m)}$	$\rightarrow \mathbf{D\,p - D\,m}$	**1b** benutzt Ergebnis von **1a**
2a:	$\underline{\mathbf{D}}\,\mathbf{m}$	$\rightarrow \mathbf{D\,m}$	$\underline{\mathbf{D}}\,\mathbf{p}$	$\rightarrow \mathbf{D\,p}$	
2b:	$\underline{\mathbf{T}}\,\mathbf{(D\,m)}$	$\rightarrow \mathbf{D\,m - m \neq 0}$	$\underline{\mathbf{T}}\,\mathbf{(D\,p)}$	$\rightarrow \mathbf{D\,p - m}$	**2b** benutzt Ergebnis von **2a**
2c:	$\underline{\mathbf{T'}}\,\mathbf{(D\,m)}$	$\rightarrow \mathbf{D\,m - D\,m} = \mathbf{0}$	$\underline{\mathbf{T'}}\,\mathbf{(D\,p)}$	$\rightarrow \mathbf{D\,p - D\,m}$	**2c** benutzt Ergebnis von **2a**

$\Rightarrow$ Nur "**2a** + **2c**" liefert dasselbe Ergebnis wie "**1a** + **1b**".

3. Rücktransformation

Wir nehmen an, dass wir im speziellen Koordinatensystem irgendeinen weiteren Punkt berechnet haben, weil das einfacher geht als im Originalsystem. Als Endergebnis seien aber die Koordinaten im Originalsystem gesucht.

Bei der Rücktransformation wird "Alles" umgekehrt! Jede einzelne Operation und auch die Reihenfolge der Operationen!

Wenn alle Transformation durch eine Matrix-Multiplikation beschrieben werden können, gilt für die Umkehrung (= inverse Matrix): $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Für die Operationen des Wegs "1a+1b" $\mathbf{D}\,\underline{\mathbf{T}}$ (zuerst Verschiebung, dann Drehung!) gilt als Umkehrung $(\mathbf{D}\,\underline{\mathbf{T}})^{-1} = \underline{\mathbf{T}}^{-1}\,\mathbf{D}^{-1}$ (zuerst inverse Drehung, dann inverse Verschiebung).

Dabei $\underline{\mathbf{T}}^{-1} \rightarrow + \binom{a}{b}$ und $\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ (entspricht **D** für einen Winkel $-\alpha$)

Formal, was anschaulich klar ist: $\underline{\mathbf{T}}\,\underline{\mathbf{T}}^{-1} = \underline{\mathbf{T}}^{-1}\,\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{E}}$ ("Einheitsoperation");
$\mathbf{D}\,\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{D} = \mathbf{E}$ (Einheitsmatrix)

Formal ist einsichtig, dass die Rücktransformation wieder den Ausgangspunkt liefert:
$\underline{\mathbf{T}}^{-1}\,\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{D}\,\underline{\mathbf{T}}\,\mathbf{p} = \underline{\mathbf{T}}^{-1}\,(\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{D})\,\underline{\mathbf{T}}\,\mathbf{p} = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{E}\,\underline{\mathbf{T}}\,\mathbf{p} = \underline{\mathbf{E}}\,\mathbf{E}\,\mathbf{p} = \mathbf{p}$

Ohne Beweis wurde dabei benutzt, dass **E** und $\underline{\mathbf{T}}$ vertauschbar sind.

Eine explizite Rechnung bestätigt das.

Beispiel: $\underline{\mathbf{T}}^{-1}\,\mathbf{D}^{-1}$ (1b) liefert für den Punkt **Q** wieder die Ausgangskoordinaten $\binom{x}{y}$

• Zuerst die Drehung:

$$\mathbf{D}^{-1}\,(\mathbf{1b}) = \begin{pmatrix} \cos(\boldsymbol{\alpha}) & \sin(\boldsymbol{\alpha}) \\ -\sin(\boldsymbol{\alpha}) & \cos(\boldsymbol{\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x-a)\cos(\alpha) - (y-b)\sin(\alpha) \\ (x-a)\sin(\alpha) + (y-b)\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

x-Koordinate:

$(x\text{-}a)\cos^2(\alpha) - (y\text{-}b)\cos(\alpha)\sin(\alpha) + (x\text{-}a)\sin^2(\alpha) + (y\text{-}b)\sin(\alpha)\cos(\alpha) = (x - a)$

y-Koordinate:

$-(x\text{-}a)\sin(\alpha)\cos(\alpha) + (y\text{-}b)\sin^2(\alpha) + (x\text{-}a)\cos(\alpha)\sin(\alpha) + (y\text{-}b)\cos^2(\alpha) = (y - b)$

• Dann die Translation:

$$\underline{\mathbf{T}}^{-1}\binom{x-a}{y-b} \rightarrow \binom{x-a}{y-b} + \binom{a}{b} = \binom{x}{y}\ ☑$$

Genauso entstehen die Ausgangskoordinaten mit der Umkehrung von "**2a** + **2c**":
formal: $\mathbf{D}^{-1}\,\underline{\mathbf{T}}'^{-1}\,(\underline{\mathbf{T}}'\,\mathbf{D}\,\mathbf{p}) = \mathbf{D}^{-1}\,\underline{\mathbf{T}}'^{-1}\,\underline{\mathbf{T}}'\,\mathbf{D}\,\mathbf{p} = \mathbf{p}$
Explizite Rechnung: Der Weg "**2a** + **2c**" enthält zuerst die Drehung, dann die Translation. Als Umkehrung ist zuerst die Translation, dann die Drehung durchzuführen. Für die Translation wurde **T'** = - **D m** benutzt, die jetzt anzuwendende Umkehrung ist $\underline{\mathbf{T}}'^{-1}$ = + **D m**: