Kreis / Kugel - Integration

1. Kreis

Formelsammlung - Fläche: $A = r^2\pi$

Integration kartesische Koordinaten

f(x) ist die Kreislinie, also $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$
Ohne weitere Herleitung (Formelsammlung):
$\int \sqrt{r^2 - x^2}dx = (1/2) \cdot \{ x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arcsin(x/r) \}$
Zuerst ein Vierteilkreis
Die gesuchte Fläche ist das bestimmte Integral zwischen 0 und r.

$$A/4 = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = (1/2)\cdot\{ r\cdot\sqrt{r^2 - r^2} + r^2 \arcsin(1) \} - (1/2)\cdot\{ 0\cdot\sqrt{r^2 - 0} + r^2 \arcsin(0) \}$$

$\arcsin(1) = \pi/2$; $\arcsin(0) = 0$
$A/4 = (1/2)\, r^2\, \pi/2 = r^2\, \pi/4 \rightarrow A = r^2\pi$ ☑

Eventuell "lehrreich" ist $A/4 = \int_{-r}^{0} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$, also der Viertelkreis "auf der anderen Seite"
$A/4 = (1/2) \cdot \{ 0 + 0\} - (1/2)\cdot\{ 0 + r^2 \cdot \arcsin(-r/r) \}$
"Voreilig" schließen wir $\arcsin(-1) = 3\pi/2$, weil ja $\sin(3\pi/2)=-1$. Damit aber $A/4 = - 3\, r^2\, \pi/4$ ☒
Wegen der Mehrdeutigkeit von arcsin(x) <u>muss</u> der Hauptwert $-\pi/2 \le \arcsin(x) \le \pi/2$ eingesetzt werden! Damit korrekt $A/4 = -(1/2)\, r^2\, (-\pi/2) = r^2\, \pi/4$ ☑

Zum gleichen <u>Integral</u> $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ gelangt man <u>auch mit folgender Überlegung</u>:
Die Fläche ist als Integral $\iint dx\, dy$ berechenbar, dx dy ist dabei ein differentielles Flächenelement. Es sind die geeigneten Integrationsgrenzen zu finden. Für einen Viertelkreis geht x von 0 bis r. y verläuft dann jeweils in dem zu x gehörenden Intervall. Wegen der Kreisbedingung gilt $x^2 + y^2 = r^2$. Für den Viertelkreis sind nur die positiven y-Werte einzusetzen, also $0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}$.
Damit haben wir das schon Bekannte "neu erfunden". An der Stelle x wird ein Balken mit infinitesimaler Breite dx und einer Höhe von y-unterer Wert bis y-oberer Wert an der Stelle x betrachtet.

$$A/4 = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dy\,dx = \int_0^r [\,y]_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

Für den Kreis ist diese Betrachtung natürlich übertrieben und überflüssig! Wichtig ist dies nur, wenn die untere Begrenzung der Fläche <u>nicht</u> durch die x-Achse gegeben ist. Wir haben die Wahl zwischen dem gewohnten Einfachintegral und einem Doppelintegral, wenn die untere Grenze die x-Achse ist. Wir werden sehen, dass wir bei der Volumenberechnung eine analoge Wahl zwischen einem Dreifach- und einem Doppelintegral haben, wenn die untere Grenze für z die x,y-Ebene ist.

Integration Polarkoordinaten

$r \ge 0$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; Flächenelement $dA = r\, dr\, d\varphi$
$A = \int_0^r \int_0^{2\pi} r\, dr\, d\varphi = r^2/2 \cdot 2\pi = r^2\pi$ ☑

2. Kugel

Formelsammlung - Volumen: $V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$

Kartesische Koordinaten (über Rotationskörper)

Ein Schnitt durch die Kugel in der x-y-Ebene ist ein Kreis mit dem Radius r.
Dafür gilt $x^2 + y^2 = r^2$ (z =0).

An einer anderen Stelle $z \neq 0$, parallel zur x-y-Ebene, liegt auch ein Kreis vor, mit einem anderen Radius r', aber wir müssen r' nicht berechnen. Die verschiedenen z werden durch die Rotation erreicht.

Wenn an einer Stelle x ein Punkt des Kreises {mit y = f(x)} komplett um die x-Achse gedreht wird, entsteht eine Kreisscheibe {in der y-z-Ebene}. Der Radius dieses Kreises ist y = f(x), die umschlossene Fläche "$r^2\pi$" gleich $\pi f^2(x)$. Eine infinitesimal dicke Scheibe hat das Volumen $\pi f^2(x)\, dx$. Die Summation dieser Scheiben im betrachteten Intervall auf der x-Achse {Integral der Scheiben} ist das Gesamtvolumen des Rotationskörpers.

Für eine kürzere Rechnung wird von 0 bis r integriert. Damit entsteht das halbe Kugelvolumen.

$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

$V/2 = \pi \int_0^r f^2(x)dx = \pi \int_0^r (r^2 - x^2)\ dx = \pi\, [r^2x]_0^r - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^r = \pi r^3 - \pi r^3 / 3 = 2 \pi r^3/3$

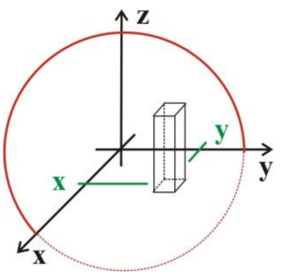
$\rightarrow V = 4\pi/3\ r^3$ ☑

Kartesische Koordinaten (über Dreifachintegral)

Neben der allgemeinen Diskussion als konkretes Beispiel eine Achtelkugel. Kugelmittelpunkt sei der Koordinatenursprung.

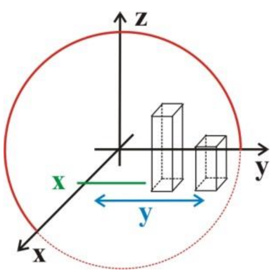
Das gesamte Volumen wird als Summe infinitesimaler Blöcke $dx \cdot dy \cdot dz$ berechnet. Unter "Summe" ist dabei die Integration zu verstehen! (Integral als Grenzwert von Ober- und Untersumme)

Die zu integrierende Funktion ist f(x,y,z). Für die Berechnung des Volumens der Kugel können wir wie beim Kreis innerhalb der Kugel überall f(x,y,z) = 1 setzen.



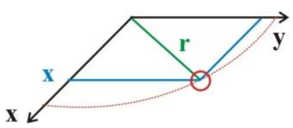
Als erstes wählen wir einen bestimmten Ort (x,y) - aus dem gesamten Wertebereich. Für die Kugel muss (x,y) im Innern liegen. Durch die Summation über alle möglichen z entsteht an der Stelle (x,y) ein Quader. Im allgemeinen Fall muss die Summation vom kleinst- zum größtmöglichen z - an der Stelle (x,y) - verlaufen. Für die 1/8 - Kugel ist die untere Grenze die x-y-Ebene, z = 0. Die obere Grenze ist der Kugelrand. Dafür gilt die Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Allgemein sind die Grenzen des Integrals sind $z_1(x,y)$ und $z_2(x,y)$, für die 1/8-Kugel 0 und $\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

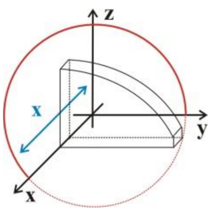


Diese Quader werden als zweites für einen festen x-Wert für alle y addiert. Auch hier sind je nach der Stelle x ein unterer und ein oberer Wert möglich, allgemein $y_1(x)$ bis $y_2(x)$.

Für die Kugel sehen wir in der x-y-Ebene $x^2 + y^2 = r^2$ als Bedingung für das größtmögliche y zu einem bestimmten x.



Die Integralgrenzen sind 0 und $\sqrt{r^2 - x^2}$



Als letzter Schritt werden die erzeugten Schichten über alle möglichen x, x_1 bis x_2, summiert. Für die 1/8-Kugel sind die Grenzen 0 und r.

Damit erhalten wir allgemein die Summe aller Funktionswerte im betrachteten Volumen.

$$\iiint f(x,y,z)dV = \int_{x1}^{x2}\left(\int_{y1(x)}^{y2(x)}\left\{\int_{z1(x,y)}^{z2(x,y)} f(x,y,z)dz\right\}dy\right)dx$$

Für die Kugel ist $V/8 = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$

(Reihenfolge der Integration "von innen nach außen")

Problemlos ist die Integration über z: $\int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$

Um für die Integration über y

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = (1/2) \cdot \{ x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin(x/a) \}$

anwenden zu können, wird abgekürzt: $a^2 = r^2 - x^2$

r und x sind bezüglich der Integration über y Konstanten, können also zusammengefasst werden.

$$\int_0^{\sqrt{a^2}} \sqrt{a^2-y^2}\ dy = \int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\ dy = \frac{1}{2}\left[y\cdot\sqrt{a^2-y^2} + a^2\cdot\arcsin\left(\frac{y}{a}\right)\right]_0^a =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\arcsin(1) = \frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi(r^2 - x^2)/4$$

Integration über x:

$$\int_0^r \frac{\pi}{4}\,(r^2-x^2)\,dx = \left[\frac{\pi}{4}\,r^2x\right]_0^r - \left[\frac{\pi}{4}\,\frac{x^3}{3}\right]_0^r = \frac{\pi}{4}\,(r^3 - \frac{r^3}{3}) = \frac{\pi r^3}{6} = V/8 \rightarrow V = \frac{4\pi}{3}\cdot r^3\ ☑$$

Niemand behauptet, dass dies ein zweckmäßiger Weg zur Berechnung des Kugelvolumens ist! Es sollte nur gezeigt werden, dass dies prinzipiell auch mit kartesischen Koordinaten durchführbar ist!

Kartesische Koordinaten (über Doppelintegral)

Weil die untere Grenze von z für jedes {x,y} z = 0 ist, liegen jeweils Säulen mit der Höhe z = f(x,y) vor. Die Integration über z ist nicht nötig, es kann direkt $z = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$ eingesetzt werden und nur ein Doppelintegral (über x und y, gleich wie vorher) ist zu berechnen.

Es ist dies nur ein begrifflicher Unterschied, der gesamte Rechenaufwand ist identisch zu vorher!

Kugelkoordinaten

$r \geq 0;\ 0 \leq \vartheta \leq \pi;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$; Volumenelement $dV = r^2 \sin(\vartheta)\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$

$V = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\vartheta)\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = r^3/3 \cdot - \{\cos(\pi) - \cos(0)\} \cdot 2\pi = (4\pi/3)\, r^3$ ☑

Trivialerweise sind Kugelkoordinaten auch besser geeignet für Berechnung an einer Kugel!

3.Kreissektor

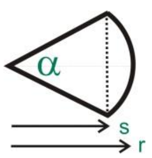
Formelsammlung - Fläche: $A = \frac{\alpha\, r^2}{2}$

r Radius des Kreises

α Öffnungswinkel des Sektors (im Bogenmaß, "rad"!)

Zusammenhang mit dem "Sektor-Beginn" s:

$\alpha = 2 \arccos(s/r)$



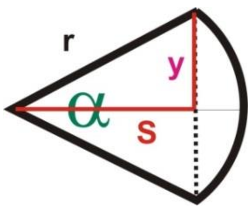
Elementare Geometrie

Kreissektor mit dem Winkel α: Dessen Fläche ist entsprechend dem Winkelanteil ein Anteil der gesamten Kreisfläche (Winkel 2π):

$A_{Sektor} = (\alpha / 2\pi) \cdot r^2\pi = \alpha\, r^2 / 2$ ☑

Integration kartesisch

Umständlich, weil zwei verschiedenartige Flächen vorliegen. Ein Dreieck und ein Kreissegment.



Für das Dreieck ist eine Integration übertrieben! Sinnvoll: Elementargeometrie!

s in der Sektormitte zwischen dem Ursprung und dem Segment

Fläche = Länge s · halbeHöhe y

$\cos(\alpha/2) = s/r$ und $\sin(\alpha/2) = y/r$

$A_{Dreieck} = s \cdot y = r^2\, [\,\cos(\alpha/2) \cdot \sin(\alpha/2)\,] = r^2\, [\,\sin(\alpha) / 2]$

Die Integration des Kreissegments ist unten beschrieben.

$A_{Segment} = r^2\, (\alpha - \sin\alpha\,) / 2$

Damit die Summe $A_{Sektor} = r^2/2 \cdot \alpha$ ☑

Integration Polarkoordinaten

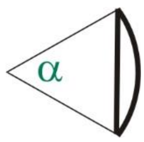
$r \geq 0$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; Flächenelement $dA = r\, dr\, d\varphi$

Für r wie beim Vollkreis, für φ ein Anteil α

$A = \int_0^r \int_0^\alpha r\, dr\, d\varphi = r^2/2 \cdot \alpha$ ☑

4. Kreissegment

Formelsammlung - Fläche: $A = r^2\, (\alpha - \sin\alpha\,) / 2$



α der Öffnungswinkel des dazugehörenden Kreissektors.

α ist im Bogenmaß ("rad") einzusetzen!

Die Verwendung von "rad" ist beim Sinus unerheblich, bei "α" aber zwingend notwendig!

Wie beim Kreissektor der Zusammenhang: $\alpha = 2 \arccos(\, s/r)$

Anmerkung

Die angegebene Formel stimmt auch für Winkel > 90°.

Am schnellsten einzusehen mit einer kurzen Umformung.

Für $\alpha > \pi/2$ ist die Fläche dieses Segments "gesamte Kreisfläche - Segment für $(2\pi - \alpha)$".

$A = r^2\pi - r^2/2 \cdot \{\, (2\pi - \alpha) - \sin(2\pi - \alpha)\, \}$

♦ $\sin(2\pi - \alpha) = \sin(2\pi)\cos(\alpha) - \cos(2\pi)\sin(\alpha) = -\sin(\alpha)$

$A = r^2\pi - r^2\pi + r^2\alpha/2 - r^2\sin(\alpha)/2 = r^2\, (\alpha - \sin\alpha\,) / 2$

Integration kartesisch

Wir betrachten die obere Hälfte des Segments. Untere Grenze = x-Achse, obere Grenze = f(x) = Kreislinie; $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Formelsammlung: $\int f(x)dx = (1/2) \cdot \{\, x \cdot f(x) + r^2 \cdot \arcsin(\, x/r\,)\, \}$

Die gesuchte Fläche ist das bestimmte Integral zwischen s und r.

$\int_s^r f(x)dx = (1/2) \cdot \{\, r \cdot f(r) + r^2 \cdot \arcsin(\, r/r\,)\, \} - (1/2) \cdot \{\, s \cdot f(s) + r^2 \cdot \arcsin(\, s/r\,)\, \}$

$f(r) = \{\, r^2 - r^2\, \}^{1/2} = 0$; $\arcsin(\,1) = \pi/2$.

f(s) und arcsin(s/r) können nicht vereinfacht werden.

Die gesamte Segmentfläche ist das Doppelte:

$A_{Segment} = r^2\ \pi/2 - \{ s \cdot f(s) + r^2 \cdot \arcsin(s/r) \}$

Das ist eine Formel, die nicht mehr den Winkel α benutzt.

Vergleich: Umrechnung in die Formel mit α

Zu $s \cdot f(s)$:

Es ist $s = r \cos(\alpha/2)$

$s \cdot f(s) = r \cos(\alpha/2) \cdot \{r^2 - r^2 \cos^2(\alpha/2)\}^{1/2} = r \cos(\alpha/2) \cdot r \sin(\alpha/2) = r^2/2 \cdot \sin(\alpha)$.

Zu $\arcsin(s/r)$:

Es gilt $\arcsin(x) = \pi/2 - \arccos(x)$ und es ist $s/r = r \cos(\alpha/2) / r = \cos(\alpha/2)$

$\arccos(\cos(x)) = x$ (Funktion / Umkehrfunktion)

Damit $\arcsin(s/r) = \pi/2 - \alpha/2$

Zusammengefasst: $\cdot r^2\ \pi/2 - r^2/2 \cdot \sin(\alpha) - r^2\ \pi/2 + r^2\ \alpha/2$

$A_{Segment} = r^2\ (\alpha - \sin \alpha\ ) / 2$ ☑ identisch zu Vorigem

Integration Polarkoordinaten

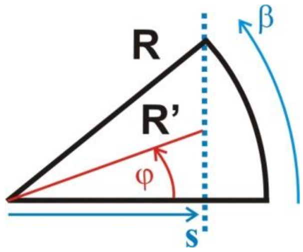
$r \geq 0;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$; Flächenelement $dA = r\ dr\ d\varphi$

Wir rechnen wieder mit der oberen Segmenthälfte (ab $\varphi = 0$).

- ➔ Zur leichteren Lesbarkeit "R" für den Kreisradius! (In der Endformel wieder das übliche "r")
- ➔ Für kürzere Formeln in der Herleitung hier β für den halben Öffnungswinkel! **$\beta = \alpha/2$**!
  (Am Ende wieder α für den ganzen Öffnungswinkel eingesetzt.)

Die obere Grenze ist trivial, β für den Winkel φ und R für r, ebenso die untere Grenze 0 für φ.

Die untere Grenze für r hängt aber vom Winkel φ ab! Der Segmentbeginn ist also nicht mehr ein fester Wert, wie in einem kartesischen System!



Nach dem "großen Dreieck" ist $\cos(\beta) = s/R$.

Für $\varphi > 0$ ist $r_{\text{untere Grenze}}$ bei R' und $\cos(\varphi) = s/R' \rightarrow R' = s/\cos(\varphi) = R \cos(\beta)/\cos(\varphi)$

(Kontrolle: Für $\varphi = 0$ ist untere Integrationsgrenze $R' = R \cos(\beta) = s$. Für $\varphi = \beta$ ist $R' = R$.)

Intgral = Fläche der Segmenthälfte $A/2 = \int_0^\beta \int_{R\cos(\beta)/\cos(\varphi)}^R r\ dr\ d\varphi$

Inneres Integral: $\int_{R\cos(\beta)/\cos(\varphi)}^R r\ dr = R^2/2 - R^2/2 \cdot \cos^2(\beta)/\cos^2(\varphi)$

Äußeres Integral: $R^2/2 \cdot \int_0^\beta d\varphi - R^2/2 \cdot \cos^2(\beta) \cdot \int_0^\beta \frac{1}{\cos^2(\varphi)} d\varphi$

$\int_0^\beta \frac{1}{\cos^2(\varphi)} d\varphi = [\tan(\varphi)]_0^\beta = \tan(\beta)$

$\rightarrow R^2\ \beta/2 - R^2/2 \cdot \cos^2(\beta) \cdot \sin(\beta)/\cos(\beta) = R^2\ \beta/2 - R^2 \sin(\beta) \cos(\beta)/2$

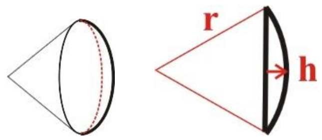
- ♦ $\sin(\beta) \cos(\beta) = \sin(2\beta)/2 = \sin(\alpha)/2$
- ♦ $R^2\ \beta/2 = R^2\ (\alpha/2)/2 = R^2\ \alpha/4$

$A/2 = R^2\ \{\alpha - \sin(\alpha)\}/4$

Wieder "r" anstelle von "R": $A_{Segment} = r^2\ \{\alpha - \sin(\alpha)\} / 2$ ☑

5. Kugelsegment der Höhe h

Formelsammlung - Volumen: $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$



Kartesische Koordinaten (über Rotationskörper)

$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

$$V = \pi \int_{r-h}^{r} f^2(x)dx = \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\ dx = \pi\, [r^2x]_{r-h}^{r} - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_{r-h}^{r} =$$

$$= \pi r^3 - \pi r^3 + \pi r^2 h - \frac{\pi}{3} r^3 + \frac{\pi}{3} \{r^3 - 3 r^2 h + 3 r h^2 - h^3\} =$$

$$= \pi r h^2 - \frac{\pi}{3} h^3 = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)\ ☑$$

Frage zur Anwendbarkeit der Formel für das Kugelsegment

Ist die Formel $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$ anwendbar für alle Höhen einer Halbkugel?

$h = 0 \rightarrow V = 0 \rightarrow$ "Null-Segment" ☑

$h = r \rightarrow V = \frac{2\pi}{3} r^3 \rightarrow$ richtiger Wert für Halbkugel ☑

$h = r/2 \rightarrow V = \frac{2\pi}{3} r^3 \cdot \frac{5}{16} \rightarrow$ zwischen Werten für h =0 und h = r ☑

Gültig für ganze Kugel? $h = 2r \rightarrow V = \frac{4\pi}{3} r^3 \rightarrow$ auch richtig ☑

$h = 3r/2 \rightarrow V = \frac{2\pi}{3} r^3 \cdot \frac{27}{16}$

das müsste gleich sein "ganze Kugel - Segment für r/2": $\frac{2\pi}{3} r^3 \{2 - \frac{5}{16}\} = \frac{2\pi}{3} r^3 \cdot \frac{27}{16}$ ☑

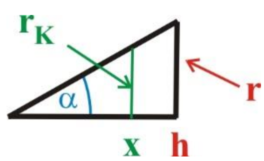
$\Rightarrow$ Die Formel ist für <u>alle</u> $0 \le h \le 2r$ anwendbar.

6. Kreiskegel mit Radius r (Grundfläche) und Höhe h

Formelsammlung - Volumen: $V = \frac{r^2 \pi h}{3}$ {Elementargeometrie: $V = \frac{1}{3}$ Grundfläche · Höhe $= \frac{1}{3} r^2 \pi h$}

Kartesische Koordinaten (über Rotationskörper)

Kreis in der Höhe x von der Kegelspitze aus:
"Strahlensatz": $r / h = \tan(\alpha)$ und $r_K / x = \tan(\alpha)$
$\rightarrow r_K = x\, r / h$



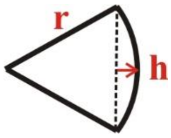
Damit differentielles Volumenelement $dV = r_K^2 \pi dx$

$$V = \int_0^h r_K^2 \pi dx = \int_0^h \frac{x^2 r^2 \pi}{h^2} dx = \frac{r^2\pi}{3h^2} \{h^3 - 0^3\} = \frac{r^2 \pi h}{3}\ ☑$$

Falls x von der Grundfläche aus angesetzt wird, ist $r_K = (h-x)\, r / h = r\,(1 - x/h)$. Die Integration enthält dann 2 weitere Terme, die sich kürzen.

7. Kugelausschnitt (zu Kugel mit Radius r) mit Segmenthöhe h

Formelsammlung - Volumen: $V = \frac{2\pi}{3} r^2 h$



Ausschnitt = Segment der Höhe h
+ **Kreiskegel** mit Höhe (r - h) und Radius in dieser Höhe (r_K)

Für den Kreiskegel gilt $r_K^2 + (r - h)^2 = r^2 \rightarrow r_K^2 = r^2 - r^2 + 2rh - h^2 = 2rh - h^2$

"Richtige" Werte eingesetzt in die Formel für den Kreiskegel $\frac{r^2\pi h}{3}$:

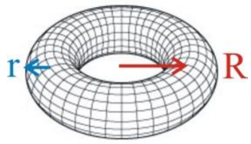
$V = \frac{1}{3}(2rh - h^2)\,\pi\,(r - h) = \frac{\pi}{3}\{2r^2h - 2rh^2 - rh^2 + h^3\}$

Gesamtvolumen des Ausschnitts (Summe Segment + Kreiskegel):

$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) + \frac{\pi}{3}\{2r^2h - 3rh^2 + h^3\} = \frac{\pi}{3}\{3rh^2 + h^3 + 2r^2h - 3rh^2 - h^3\} = \frac{2\pi}{3} r^2 h$ ☑

8. Beispiel für Rotationskörper: Torus

Ein "Kreisring" mit dem Radius **r** im Abstand **R**



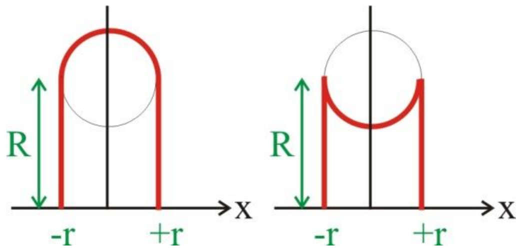
Nach der "Guldinschen Regel" ist das Volumen: Fläche der erzeugenden Figur (Kreis mit Radius r) x Umfang des Kreises, der durch Rotation des Schwerpunkts der Figur erreicht wird. Der Schwerpunkt der Figur "Kreis" ist der Mittelpunkt des Kreises.

Damit $V(\text{Torus}) = r^2\pi \times 2\pi R = 2\pi^2 R r^2$

Alternativ kann man sich den Torus durchschnitten und aufgeklappt vorstellen. Es entsteht ein Zylinder mit der Grundfläche $r^2\pi$ und der Höhe $2\pi R$.

Mit der Integralrechnung wird das Volumen des Rotationskörpers über $V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$ berechnet. Dabei wird $y = f(x)$ in einem Vollkreis um die x-Achse gedreht.

In V_1 wird die Fläche zwischen x-Achse und dem oberen Rand betrachtet, in V_2 die Fläche zwischen x-Achse und unterem Rand. Um eine einfache Formel für die Kreislinie einzusetzen, wird der Kreis symmetrisch auf der x-Achse angeordnet. Das Volumen des gedrehten Kreises ist die Differenz der Integrale $V_1 - V_2$.



$V_1 = \pi \int_{-r}^{+r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$; $V_2 = \pi \int_{-r}^{+r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$

$\{ R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 \} - \{ R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 \} = 4R\sqrt{r^2 - x^2}$

$V = V_1 - V_2 = 4\pi R \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

Formelsammlung: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = (1/2) \cdot \{ x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin(x/a) \}$

$\int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right]_{-r}^{+r} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \{ r \cdot 0 + r^2 \arcsin(1) - (-r) \cdot 0 - r^2 \arcsin(-1) \} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \{ \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) \} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \pi$

$V = 4\pi R \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \pi = 2\pi^2 R r^2$