Kugel - Übungen

1) Kugelgleichung K: $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 24y - 40z + 76 = 0$
   Gesucht: Mittelpunkt und Radius
2) Kugel: **M**(1|-2|6); r. Ebene: $\mathbf{x}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = 20$
   Die Ebene berührt die Kugel (Tangentialebene). Gesucht: r
3) Kugel: **M**(2|-4|6); r = 3. Gerade: g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$
   Gesucht: Lage der Geraden zur Kugel. Falls eine Sekante vorliegt, ist die Berechnung der Schnittpunkte <u>nicht</u> verlangt!
4) Kugel: **M**(3|-2|1); r = 4. Ebene: E: 2 x - 3 y + z = 6
   Gesucht: Schnittkreis (Mittelpunkt und Radius), Segmentvolumen
5) Kugel: **M**(2|-1|3); r = 2. Mit der Spitze **Q**(3;2;1) ist ein Tangentialkegel definiert.
   Gesucht: Mittelpunkt und Radius des Berührkreises, Öffnungswinkel, Höhe und Volumen des Tangentialkegels.
6) Kugeln: $\mathbf{M_1}$(3|2|1); $r_1 = 3$; $\mathbf{M_2}$(5|3|3); $r_2 = 4$.
   Gesucht: a) Schnittvolumen, b) Schnittkreis - Mittelpunkt und Radius, c) Gleichung der Schnittebene
7) Kugeln: $\mathbf{M_1}$(3|-1|2); $r_1 = 3$; $\mathbf{M_2}$(1|2|-4); $r_2 = 4$.
   Gesucht: Schnittverhalten

<u>1)</u>

Standardverfahren:
a) Anpassen der gesamten Gleichung, damit Koeffizienten vor x^2, y^2, z^2 1 sind.
b) Quadratische Ergänzung und Vergleich mit $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$.

K:	$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 10z + 19 = 0$	
	$x^2 - 2x + 1^2$	$19 \quad - 1^2$
	$y^2 + 6y + (-3)^2$	$- (-3)^2$
	$z^2 - 10z + 5^2$	-5^2

K: $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 16 \rightarrow$ **M**(1|-3|5); r = 4

<u>2)</u>

Hesse Abstandsformel: $d = |(\mathbf{m} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o}| = |\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}| / |\mathbf{n}|$

Bekannt sind $\mathbf{m} = \begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ und $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 20$. $|\mathbf{n}| = 5$

$\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = -5 \rightarrow d = |-5 - 20| / 5 = 5 \Rightarrow$ Berührung, falls d = r $\rightarrow$ r = 5

3)

Am schnellsten Berechnung des Abstands und Vergleich mit r.

$d = |(\mathbf{m} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u_0}|$ (umständlicher: Lotfußpunkt-Verfahren)

$|\mathbf{u}| = \sqrt{29}$: $\mathbf{m} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$(\mathbf{m} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; Betrag davon 5 $\rightarrow$ $d = 5 / \sqrt{29} \approx 0{,}93 < r \rightarrow$ Sekante

4)

Verfahren: Das Lot von der Ebene auf den Kreismittelpunkt **M** schneidet E im Mittelpunkt des Schnittkreises $\mathbf{M_K}$. Für den Radius des Schnittkreises (nach Pythagoras) r_K muss der Abstand der Ebene vom Kreismittelpunkt d bekannt sein. Mit der Höhe des Segments $h = |r - d|$ ist das Segmentvolumen berechenbar.

(Hesse): $d = |\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}| / |\mathbf{n}|$

$\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 13$; $|\mathbf{n}| = \sqrt{14}$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 6 \rightarrow d = \sqrt{14}/2$ {$\approx 1{,}87$; also $d < r$, Schnitt}

Lot von der Ebene auf **M**: g_L: $\mathbf{x} = \mathbf{m} + t\,\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 + 2t \\ -2 - 3t \\ 1 + t \end{pmatrix}$

g_L in E: $2(3 + 2t) - 3(-2 - 3t) + (1 + t) = 14t + 13 = 6 \rightarrow t = -1/2$

t in g_L: $\mathbf{m_L} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$r_K = \{ r^2 - d^2 \}^{1/2} = 5/\sqrt{2} \approx 3{,}54$

Segmenthöhe $h = |r - d| = 4 - \sqrt{14}/2$

Segmentvolumen $V = (\pi/3)\, h^2 (3r - h) = 128\pi/3 - 89\pi\sqrt{14}/12 \approx 46{,}9$

5)

Abstand Kugelmittelpunkt - Pol: $\mathbf{q} - \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ 2 - (-1) \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow d = \sqrt{14}$

a) Trigonometrie:

halber Öffnungswinkel α: $\sin(\alpha) = r / d = 2 / \sqrt{14} \rightarrow \alpha \approx 0{,}564$ (32,3°)

$\cos(\alpha) = r_K / r \rightarrow r_K = 1{,}690$ (Kegelradius ≡ Radius des Berührkreises)

Aus $r^2 = r_K^2 + d_K^2 \rightarrow d_K = 1{,}069$ (Abstand Kugelmittelpunkt zu Polarebene)

$h_K = d - d_K = 2{,}673$ (Kegelhöhe)

Kegelvolumen: $V_K = (\pi/3)\, r_K^2\, h_K = 7{,}996$

b) Analytische Geometrie

Von der Polarebene ist bisher nur der Abstand von **M** bekannt, d_K. Um den Mittelpunkt des Berührkreises zu erhalten, muss der Schnittpunkt zwischen dieser Ebene und $\overrightarrow{\mathbf{MQ}}$ berechnet werden.

Gleichung der Polarebene: E: $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) = r^2$. {**x** allgemeiner Punkt auf der Ebene}

$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-(-1) \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 \rightarrow x + 3\,y - 2\,z = -3 \rightarrow$ Daraus $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ (Normale auf die Polarebene)

{Als "Kontrolle": **n** muss gleich (**q** - **m**) sein - bis auf einen eventuellen konstanten Faktor - weil beide Vektoren orthogonal zur Polarebene sind. ☑}

Gerade in Richtung $\overrightarrow{\mathbf{MQ}}$: g: $\mathbf{x} = \mathbf{m} + t\,\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2+t \\ -1+3t \\ 3-2t \end{pmatrix}$

Eingesetzt in Ebene: $2 + t - 3 + 9\,t - 6 + 4\,t + 3 = 0 \rightarrow 14\,t = 4 \rightarrow t = 2/7$

t in g: $\mathbf{x} \equiv \mathbf{m}_K = \begin{pmatrix} 16/7 \\ -1/7 \\ 17/7 \end{pmatrix}$ (Mittelpunkt des Berührkreises)

d_K kann auch damit errechnet werden, $d_K = |\, \mathbf{m}_K - \mathbf{m} \,| = \left| \begin{pmatrix} 2/7 \\ 6/7 \\ -4/7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{56}/7 \approx 1{,}069$ ☑

(Daraus folgen r_K und V_K wie vorher.)

6)

a) Falls nur das Schnittvolumen gefragt ist, ist der schnellste Weg eine spezielle Anordnung der Kugeln. Kugel 1 im Ursprung **O**(0|0|0) und Kugel 2 auf der x-Achse bei $\mathbf{M_2}$'(d|0|0). Bekannt - falls früher hergeleitet - ist die Formel zur Berechnung der Lage der Schnittebene, d_1 (Abstand von $\mathbf{M_1}$).

b, c) 1. Weg: Mit **d** und d_1 können einfach $\mathbf{m_K}$ und r_K für den Schnittkreis (in der Schnittebene) berechnet werden.
2. Weg: Die Schnittebene wird direkt als Schnitt der Kugeln (Original-Geometrie) berechnet. $\mathbf{m_K}$ folgt als Schnitt der Ebene mit einer Geraden $\overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}}$. Mit d_1, $\mathbf{d_1} = \overrightarrow{\mathbf{M_1M_K}}$, werden r_K und das Schnittvolumen berechnet.

1) Schnittvolumen

$\mathbf{d} = \mathbf{m_2} - \mathbf{m_1} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 3-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow d = 3;\ r_1 = 3;\ r_2 = 4$

$d_1 = \{r_1^2 - r_2^2 + d^2\} / 2\,d = 1/3$

(x-Koordinate der Schnittebene in der speziellen Anordnung, Abstand von $\mathbf{M_1}$)

Segmenthöhen: $h_1 = |\, r_1 - d_1 \,| = 8/3$; $h_2 = |\, d_1 + r_2 - d \,| = 4/3$

Segmentvolumen $V = (\pi/3)\, h^2\, (3\,r - h)$

V_1 (mit h_1, r_1) $= (1216/81)\,\pi \approx 47{,}16$; $V_2 = (512/81)\,\pi \approx 19{,}86$

Schnittvolumen $V = V_1 + V_2 = (64/3)\,\pi \approx 67{,}02$

2) $\mathbf{m_K}$, r_K, Ebenengleichung - aus **d** und d_1.

$\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ und $\mathbf{M_K}$ liegen auf <u>einer</u> Geraden $\rightarrow \mathbf{m_K} = \mathbf{m_1} + (d_1/d)\,\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (1/9) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/9 \\ 19/9 \\ 11/9 \end{pmatrix}$

$r_K = \sqrt{r_1^2 - d_1^2} = \sqrt{80}/3 \approx 2{,}98$

Ebenengleichung "$(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$"; einsetzen: $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{m_K}$, $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{d}$. Damit: $\mathbf{x}\cdot\mathbf{d} = \mathbf{m_K}\cdot\mathbf{d}$.

$\mathbf{m_K}\cdot\mathbf{d} = (58 + 19 + 22)/9 = 11$: Schnittebene: E: $\mathbf{x}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 11$ oder $2\,x + y + 2\,z = 11$

3) Schnittebene aus "$K_1 \wedge K_2$"

K_1: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$

K_2: $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 16$

$K_1 - K_2$: $4x + 2y + 3z = 22 \rightarrow$ $2x + y + 2z = 11$ (Schnittebene)

Einsetzen von g: $\mathbf{x} = \mathbf{m_1} + t\,\mathbf{d}$ (Gerade in Richtung $\overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}}$) in E:

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 2+t \\ 1+2t \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}$ in E: $6 + 4t + 2 + t + 2 + 4t = 11 \rightarrow 9t = 1 \rightarrow t = 1/9$

Schnittpunkt: t in g: $\mathbf{m_K} = \begin{pmatrix} 3+2/9 \\ 2+1/9 \\ 1+2/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/9 \\ 19/9 \\ 11/9 \end{pmatrix}$

$\mathbf{d_1} = \mathbf{m_K} - \mathbf{m_1} = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 1/9 \\ 2/9 \end{pmatrix} \rightarrow d_1 = 1/3$

Mit d_1 Berechnung von r_K wie bei 2) und V wie 1).

<u>7)</u>

("Schnittverhalten" legt nahe, dass ein Berührpunkt oder "sich nicht berührende Kugeln" vorliegt.)

1) Schnittvolumen

$\mathbf{d} = \mathbf{m_2} - \mathbf{m_1} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-(-1) \\ -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \rightarrow d = 7;\ r_1 = 3;\ r_2 = 4$

Weil $d = r_1 + r_2$ liegt ein Berührpunkt vor.

$d_1 = \{r_1^2 - r_2^2 + d^2\} / 2d = 3$ (Berührpunkt liegt - wie zu fordern - auf Kreis 1)

Segmenthöhen: $h_1 = |r_1 - d_1| = 0$; $h_2 = |d_1 + r_2 - d| = 0$

Segmentvolumina und Schnittvolumen damit - wie zu fordern - 0.

2) $\mathbf{m_K}$, r_K, Ebenengleichung - aus $\mathbf{d}$ und d_1.

$\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ und $\mathbf{M_K}$ liegen auf <u>einer</u> Geraden $\rightarrow$ $\mathbf{m_K} = \mathbf{m_1} + (d_1/d)\,\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (3/7)\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/7 \\ 2/7 \\ -4/7 \end{pmatrix}$

$r_K = \sqrt{r_1^2 - d_1^2} = 0$

$\mathbf{m_K}\cdot\mathbf{d} = (-30 + 6 + 24)/7 = 0$: Tangentialebene: E: $\mathbf{x}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$ oder $-2x + 3y - 6z = 0$

3) Schnittebene aus "$K_1 \wedge K_2$"

K_1: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$

K_2: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 16$

$K_1 - K_2$: $-4x + 6y - 12z = 0 \rightarrow$ $-2x + 3y - 6z = 0$ (Tangentialebene)

$\mathbf{x} = \mathbf{m_1} + t\,\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3-2t \\ -1+3t \\ 2-6t \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}$ in E: $-6 + 4t - 3 + 9t - 12 + 36t = 0 \rightarrow 49t = 21 \rightarrow t = 3/7$

Berührungspunkt: t in g: $\mathbf{m_K} = \begin{pmatrix} 3-6/7 \\ -1+9/7 \\ 2-18/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/7 \\ 2/7 \\ -4/7 \end{pmatrix}$

$\mathbf{d_1} = \mathbf{m_K} - \mathbf{m_1} = \begin{pmatrix} -6/7 \\ 9/7 \\ -18/7 \end{pmatrix} \rightarrow d_1 = 21/7 = 3$

Daraus $r_K = 0$ und $V = 0$.