Kugel - Tangentialebene und Tangentialkegel

6. Tangentialebene an einem Punkt
7. Tangentialkegel von einem Punkt (Pol) aus

6. Tangentialebene an einem Punkt, "Tangente"

6.1 Berührungspunkt gegeben

Die Tangentialebene steht am Berührungspunkt senkrecht auf dem Vektor Kugelmittelpunkt zu Berührungspunkt. Damit können praktisch unmittelbar die Normalenform und die Koordinatengleichung angegeben werden. Für eine Parameterform der Ebene wäre eine weitere Rechnung nötig.

Kann eine Tangente an einem Punkt angegeben werden? Ja! Kann "die Tangente" angegeben werden? Nein! Jede Gerade, die in der Tangentialebene liegt, ist eine Tangente.

Es gelten dieselben Orthogonalitätsbedingungen wie im Fall Kreis / Tangente.

Berechnung also mit $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = r^2$ oder $(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = 0$

Beispiel: Kugel mit **M**(1 | 2 |3), $r = \sqrt{11}$. Berührpunkt auf der Kugel **P**(4 | 3 | 2).

Damit $\mathbf{p} - \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{n}$; $\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = 12 + 3 - 2 = 13$;

$(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{n} = 0$ für Normalenform; **n** und **p·n** für Koordinatengleichung

Normalenform: $\left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Koordinatengleichung: $3x + y - z = 13$

Zur Erzeugung der Parameterform kann für die Richtungsvektoren, $\mathbf{u} \perp \mathbf{n}$ und $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}$, ein "Standardrezept" benutzt werden.

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ nz \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -ny \\ nx \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -nz \\ ny \end{pmatrix}$

Parameterform: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eine der (unendlich vielen) Tangenten wäre **u**.

6.2 Nachbemerkung: Ist die Rechnung auch mit Analysis möglich?

→ Nur um zu zeigen, dass es möglich ist, nicht als zweckmäßiger Lösungsweg!

Es muss eine Funktion z(x,y) erstellt werden. (Im allgemeinen Fall etwas umständlich.)

Dann werden die partiellen Ableitungen benötigt: $z_x = \partial z/\partial x$ und $z_y = \partial z/\partial y$.

Der Berührungspunkt sei $\mathbf{P}(x_o \mid y_o \mid z_o)$.

Für die Tangentialebene an der Stelle (x_o, y_o) gilt damit allgemein

$$z(x,y) = z(x_o,y_o) + z_x\cdot(x - x_o) + z_y\cdot(y - y_o) \qquad (6.1)$$

$z(x_o,y_o)$ ist gleich der z-Koordinate des Berührungspunkts.

Die Auflösung von (6.1) liefert eine (lineare) Gleichung in x,y,z - also die Koordinatengleichung einer Ebene.

Beispiel

(Wie vorher): Kugel mit **M**(1 | 2 |3), r = $\sqrt{11}$. Berührpunkt auf der Kugel **P**(4 | 3 | 2).

Die Kugelgleichung wird umgestellt auf z = z(x,y).

$z = 3 \pm \{2x + 4y - x^2 - y^2 + 6\}^{1/2}$

Am Berührungspunkt $x = x_o = 4$, $y = y_o = 3$ folgt für "+" z = 4, für "-" z = 2.

Beide Werte genügen der Kugelgleichung $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$!

Der Teil zur z-Koordinate hat dann den gleichen Wert $(4 - 3)^2$ bzw. $(2 - 3)^2$.

Zum angegebenen Berührungspunkt passt "-".

Dafür sind die partiellen Ableitungen

$z_x = (x - 1) / \{2x + 4y - x^2 - y^2 + 6\}^{1/2}$ und $z_y = (y - 2) / \{2x + 4y - x^2 - y^2 + 6\}^{1/2}$

Mit Einsetzen der Zahlenwerte $x_o = 4$ und $y_o = 3$ ist

$z_x(x_o,y_o) = 3$ und $z_y(x_o,y_o) = 1$

$z(x_o,y_o)$ muss nicht mehr berechnet werden.

Daraus durch Einsetzen und Umordnen:

$z = 2 + 3\cdot(x - 4) + 1\cdot(y-3) \rightarrow$ E: 3x + y - z = 13 ☑

6.3. Umkehrung: Ist eine Ebene auch eine Tangentialebene?

(Mit Hinweis auf mögliche Flüchtigkeitsfehler bei der Bearbeitung)

Ein Punkt der Ebene muss dann auch der Berührpunkt sein. Dies ist möglich, wenn die Ebene den Abstand r vom Kugelmittelpunkt hat. Zur Berechnung des Abstands wird die Normale benötigt.

In der Normalenform und der Koordinatengleichung ist **n** direkt ablesbar. In der Parameterform wird **n** = **u** x **v** gerechnet.

Falls gewünscht, kann der Berührpunkt als Schnittpunkt Ebene / Normale errechnet werden.

Beispiel

Kugel mit **M**(2 | -3 | 5), r = $\sqrt{84}$. Ebene E: x + 4y - 2z = 22

E: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$ oder $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$

Aus der Ebenengleichung:

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; $|\mathbf{n}| = \sqrt{21}$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 22$

Vorsicht! Wir argumentieren: **P** sei der Berührpunkt; dann ist (**p** - **m**) orthogonal zur Ebene. Dann ist (**p** - **m**) auch eine Normale; also ist dies gleich unserem **n**. Weil $|\mathbf{n}| \neq r$, ist E keine Tangentialebene. → Es ist aber doch eine! **Wo** ist der **Fehler**?

Richtig ist, dass (**p** - **m**) eine Normale ist, aber jedes Vielfache davon hat dieselbe Richtung, ist also auch eine Normale! Unser in der Ebenengleichung eingesetztes **n** ist ein solches Vielfaches!

⇒ Wir müssen also <u>tatsächlich</u> auch den <u>Abstand</u> Kreismittelpunkt / Ebene <u>berechnen</u>!

Mit "Hesse-Formel": $d = (\mathbf{a} - \mathbf{m})\cdot\mathbf{n_o}$; dabei ist **a** irgendein Punkt auf E

$d = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n_o} - \mathbf{m}\cdot\mathbf{n_o} = 22 / \sqrt{21} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} / \sqrt{21} = \{22 + 20\} / \sqrt{21}) = 84 / \sqrt{84} = \sqrt{84}$

Abstand = Kreisradius ⇒ E ist Tangentialebene

Der Abstand |**p** - **m**| ist $\sqrt{84/21}$ mal größer als die Länge unseres vorhandenen **n**.

Damit ist **p** = **m** + 2**n** = $\begin{pmatrix} 2+2 \\ -3+8 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Berührpunkt)

Alternativ benutzen wir die Standardmethode zur Schnittpunktbestimmung, Einsetzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung.

Gerade durch **m** mit Richtungsvektor **n**: g: $\mathbf{x} = \mathbf{m} + t\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2+t \\ -3+4t \\ 5-2t \end{pmatrix}$

g in E: $(2 + t) + 4(-3 + 4t) -2(5 - 2t) = 22 \rightarrow 21t = 42 \rightarrow t = 2$

$\mathbf{p} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ (gleich wie oben berechnet): $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Berührpunkt)

Zusatzfrage: Ist es möglich, dass die Ebene die Kugel im Punkt **P** schneidet, dort also der richtige Abstand r vorliegt, aber die Ebene trotzdem keine Tangentialebene ist?

JA! Als "Abstand einer Ebene" ist immer der senkrechte (!) Abstand zum Punkt definiert. Wenn am Punkt **P** die Ebene geschnitten wird, ist dort die Verbindung zum Kugelmittelpunkt nicht automatisch senkrecht auf der Ebene! Der geforderte senkrechte Abstand gilt für einen anderen Punkt auf der Ebene!

7. Tangentialkegel von einem Pol aus

Die Berührpunkte aller Tangenten an eine Kugel liegen auf einem Kreis in einer Ebene. Analog zur Behandlung beim Kreis nennt man diese Ebene auch "Polarebene".

Analog zur Herleitung beim Kreis kann aus
a) der Kugelgleichung $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$ und
b) der Orthogonalitätsbedingung $(\mathbf{p} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) = 0$
  p = Berührpunkt, **q** = Pol
eine Gleichung für die Polarebene erzeugt werden:

E: $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) = r^2$ (7.1)

Beachten: In der Kugelgleichung steht **x** für alle Punkte auf der Kugel, in (7.1) für alle Punkte der Polarebene. Alle Berührpunkte **p** liegen in der Polarebene und auf der Kugel.

(7.1) wird benötigt, wenn der Mittelpunkt des aus den Berührpunkten gebildeten Kreises, $\mathbf{M_K}$, gesucht ist. Der Radius dieses Kreises, r_K, die Höhe des damit gebildeten Kreiskegels, h_K, und dessen Volumen, V_K, sind durch Elementargeometrie berechenbar.

Die Berührpunkte **p** ergeben sich durch Schnitt der Polarebene mit der Kugel.

Der Mittelpunkt $\mathbf{M_K}$ liegt auf der Verbindungslinie Pol zu Kugelmittelpunkt. Die Polarebene liegt senkrecht auf dieser Verbindungslinie. $\mathbf{M_K}$ ist damit der Schnittpunkt der Verbindungslinie mit der Polarebene.

Aus der Koordinatengleichung der Polarebene ist die Normale **n** direkt ablesbar.

➔ Siehe dazu aber auch die Bemerkung im Beispiel!

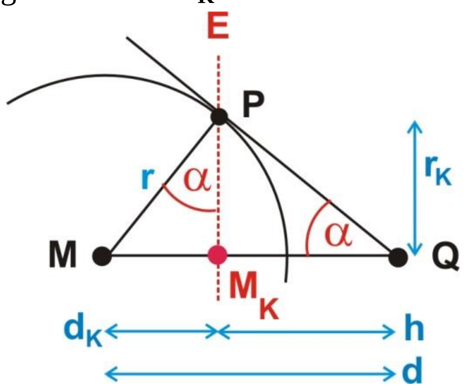
Für die Verbindungslinie ist mit dem Kugelmittelpunkt **m** als Aufpunkt

g: $\mathbf{x} = \mathbf{m} + t\,\mathbf{n}$ (7.2)

x ist hier offenkundig der allgemeine Punkt auf dieser Geraden.

Der Schnitt $g \wedge E$ liefert t, und Einsetzen dieses t in g schließlich $\mathbf{m_K}$.

Zur Berechnung der anderen Größen ein Schnitt durch die räumliche, um $\overrightarrow{MQ}$ rotationssymmetrische, Anordnung.



M Kugelmittelpunkt; r Kugelradius; **Q** Pol
E Polarebene ; **P** einer der Berührungspunkte
$\mathbf{M_K}$ Mittelpunkt Berührkreis, r_K Radius davon
d Abstand **M** - **Q**;
d_K Abstand **M** - $\mathbf{M_K}$ (= Abstand E - **M**)
h Abstand $\mathbf{M_K}$ - **Q** (Kegelhöhe)

Bekannt sind **m**, **q** und r. $\rightarrow d = |\overrightarrow{\mathbf{MQ}}| = |\mathbf{q} - \mathbf{m}|$

Aus den jeweils rechtwinkligen Dreiecken:

M-P-Q: Für den Winkel α ist $\sin(\alpha) = r / d$

M-P-M$_K$: $\cos(\alpha) = r_K / r$.

$d_K = |\overrightarrow{\mathbf{MM_K}}|$ folgt aus $r_K^2 + d_K^2 = r^2$.

Die Kegelhöhe ist damit $h_K = d - d_K$. (Eine Berechnung über **P-Q-M$_K$** ist übertrieben!)

Wenn der Öffnungswinkel 2α des Tangentialkegel explizit angegeben werden soll, muss $\alpha = \arcsin(r/d)$ gerechnet werden.

Ob $\cos(\alpha)$ über a oder aus "$1 - \sin^2(\alpha)$" berechnet wird, ist Ansichtssache.

d_K kann auch bei vorher berechnetem $\mathbf{m_K}$ als $|\mathbf{m} - \mathbf{m_K}|$ berechnet werden.

d_K ist natürlich auch der Abstand der Ebene E von **M**. Die dann auch zu findende Berechnung des Abstands mit der Hesse-Formel ist eher übertriebener Formalismus.

Für das Volumen des Tangentialkegels ist $V = (\pi/3)\, r_K^2\, h$.

♦ ***Beispiel 1***

Kreis: **M**(2 | 3 | 4); r = 2; Pol: **Q**(4 | 9 | 7)

$\mathbf{q} - \mathbf{m} = \begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix} \rightarrow d = \{4 + 36 + 9\}^{1/2} = 7$

M-P-Q: $\sin(\alpha) = r / d = 2/7 \rightarrow \alpha = 16{,}602°$

M-P-M$_K$: $\cos(\alpha) = 0{,}9583 = r_K / r \rightarrow r_K = 1{,}917$ (Kegelradius)

M-P-M$_K$: $r_K^2 + d_K^2 = r^2 \rightarrow d_K = 0{,}571$ (Abstand E zu **M**)

$h = d - d_K = 6{,}429$ (Kegelhöhe)

$V = (\pi/3)\, r_K^2\, h = 24{,}73$ (Kegelvolumen)

(7.1) E: $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) = r^2 \rightarrow \begin{pmatrix}x-2\\y-3\\z-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix} = 4$

$\rightarrow 2x + 6y + 3z = 4 + 4 + 18 + 12 = 38$ (Gleichung der Polarebene)

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$

Für die Ebenengleichung müssen wir rechnen. Für **n** allein ist die Rechnung nicht nötig! Weil (**q** - **m**) senkrecht auf der Ebene steht, ist dies schon eine Normale! Für den folgenden Schritt, $g \wedge E$, benötigen wir aber E.

Gerade g: $\mathbf{x} = \mathbf{m} + t\,\mathbf{n} = \begin{pmatrix}2+2t\\3+6t\\4+3t\end{pmatrix}$

Schnitt mit E, $g \wedge E$: $2\,(2 + 2t) + 6\,(3 + 6t) + 3\,(4 + 3t) = 49t + 34 = 38 \rightarrow$

$\rightarrow 49\,t = 4 \rightarrow t = 4/49$

t in g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}2+8/49\\3+24/49\\4+12/49\end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix}106\\171\\208\end{pmatrix} = \mathbf{m_K}$ (Mittelpunkt Berührkreis)

Berechnung von d_K mit diesem Wert:

$\mathbf{m} - \mathbf{m_K} = \begin{pmatrix}8/49\\24/49\\12/49\end{pmatrix} \rightarrow d_K = (1/49)\,\{64 + 576 + 144\}^{1/2} = 28/49$ (= 4/7 ≈ 0,571)

Bei diesem Rechenweg jetzt r_K aus $r_K^2 + d_K^2 = r^2$, $r_K = \sqrt{180}\,/7$; h und V wie vorher.

Eher übertriebener Formalismus ist die Berechnung von d_K nach Hesse:

$d_K = |(\mathbf{m} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{n_o}|$; für **p** irgendein Punkt auf E, entweder $\mathbf{m_K}$ oder ein "einfacherer" Punkt. Für y = z = 0 gilt in E x = 38/2 = 19. | **n** | = 7.

$d_K = \left|\begin{pmatrix}2-19\\3-0\\4-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\right| / 7 = |-34 + 18 + 12| / 7 = 4/7$

♦ *Ergänzende Rechnung zum Beispiel 1*

Gesucht: Zwei sich gegenüberliegende Berührungspunkte.

(Die rechnerisch einfachste Möglichkeit ist erlaubt!)

Die eventuell naheliegende Idee, dass die Berührungspunkte auf dem Schnitt von Polarebene und Kugel liegen, hilft nicht. Prinzipiell kann man damit eine Kreisgleichung gewinnen, praktisch entstehen unbrauchbare Formeln. "Gegenüberliegend" wäre auch sehr schwer zu behandeln.

Eine Parameterdarstellung der Ebene hilft weiter.

E: $\mathbf{x} = \mathbf{m_K} + s\,\mathbf{u_o} + t\,\mathbf{v_o}$. Aufpunkt ist der Mittelpunkt des Berührkreises. $\mathbf{u_o}$ und $\mathbf{v_o}$ haben die Länge 1. Damit sind solche {s, t} zu suchen, die eine Länge $|\,s\,\mathbf{u_o} + t\,\mathbf{v_o}\,| = r_K$ ergeben. So ist die Bedingung erfüllt, dass diese Berührpunkte in der richtigen Ebene liegen und den richtigen Abstand (= Radius des Berührkreises) haben.

u und **v** werden mit dem Standardrezept aus der Normalen "erraten":

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ nz \end{pmatrix} \to \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -ny \\ nx \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -nz \\ ny \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \to \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}; |\mathbf{u}| = \sqrt{40}; |\mathbf{v}| = \sqrt{45};$$

Für den Berührkreises gilt $(\mathbf{x} - \mathbf{m_K})^2 = r_K^2$.

Dass dies nicht <u>die</u> Gleichung des Berührkreises - sondern in R^3 eine Kugelgleichung - ist, wissen wir! <u>Aber</u> alle Punkte des Kreises müssen diese Gleichung erfüllen.

Als Bedingung folgt $(s\,\mathbf{u_o} + t\,\mathbf{v_o})^2 = r_K^2$.

$\mathbf{u_o}\cdot\mathbf{u_o} = \mathbf{v_o}\cdot\mathbf{v_o} = 1$, weil Einheitsvektoren.

$\mathbf{u_o}\cdot\mathbf{v_o} = 0$, wegen der Wahl orthogonaler Vektoren, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Damit ist die Bedingung $s^2 + t^2 = r_K^2$. Die einfachste, eingangs erlaubte Wahl ist s = 0.
Damit $t = \pm r_K$. Die beiden Punkte sind dann auch gegenüberliegend.

$$\mathbf{p_1} = \mathbf{m_K} + r_K\,\mathbf{v} / |\mathbf{v}| = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 106 \\ 171 \\ 208 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{180}}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{45}} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 106 \\ 129 \\ 292 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{p_2} = \ldots = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

♦ *Beispiel 2*

Eine einfache Situation, in der wir anschaulich die Gültigkeit überprüfen können:

Ursprungskugel mit r =2. und Pol auf der y-Achse bei y =4.

Zu erwarten sind dann:

- eine Polarebene parallel zu einer Ebene durch die x- und z-Achse,
- ein Berührkreis mit $\mathbf{m_K}$ auf der y-Achse.

Gleichung der Polarebene:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{q} - \mathrm{m}) = r^2 \to \mathbf{x}\cdot\mathbf{q} = r^2 \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4y = 4$$

Die Ebene hat die Bedingung y = 1; x und z sind beliebig. ⇒ Parallelebene {wie gefordert}.

In diesem einfachen Fall können wir den Schnitt Ebene / Kugel durchführen.

y = 1 in Kreisgleichung $\mathbf{x}^2 = r^2 \to x^2 + 1 + z^2 = 4 \to x^2 + z^2 = 3$.

Für einen R^2-Ausschnitt an der Stelle y = 1 ist dies eine Kreisgleichung
mit $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ und $r_K = \sqrt{3}$.

{Im R^2-Ausschnitt für die Ebene in x, z ist der Durchstoßpunkt der y-Achse der Ursprung **0**.}

$d = |\mathbf{q} - \mathbf{m}| = 4$; $\sin(\alpha) = r/d = 2/4 \to \alpha = 30°$; $\cos(\alpha) = \sqrt{3}/2 = r_K / r \to r_K = \sqrt{3}$

$r_K^2 + d_K^2 = r^2 \to d_K = \sqrt{4-3} = 1$.

(= schon angegebene y-Koordinate der Polarebene)

(= Abstand der Ebene vom Kugelmittelpunkt)