Kugel - Schnittvolumen

1. Bekannte Formeln
2. Schnitt zweier Kugeln
3. Schnitt Ebene / Kugel

<u>1. Bekannte Formeln</u> (Kugel bzw. Teile davon)

<u>*Formeln*</u> (Formelsammlung) für Kugel mit Radius r

Kugel $V = \frac{4\pi}{3} r^3$

Kugelabschnitt (Segment) $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$

Kugelausschnitt $V = \frac{2\pi}{3} r^2 h$

(Herleitungen in "Integration")

<u>2. Schnitt zweier Kugeln</u>

Zwei Kugeln mit Radien r_1 und r_2 und dem Abstand der Mittelpunkte d schneiden sich, wenn $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$.

Wenn wir einen Schnitt durch die räumliche Anordnung legen, ist das identisch der Situation für 2 Kreise.

Die Schnittfläche ist dann die Summe des Volumens zweier Kugelsegmente. Wir benötigen daher jeweils die Angabe des Radius und der Höhe.

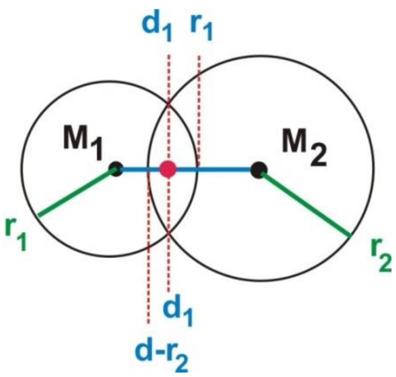
Eine "Schnittansicht" soll das verdeutlichen.

Die Kugel 1 liege dabei im Ursprung **O**(0|0|0).

Das 1. Segment hat den Radius r_1 und eine Höhe von d_1 nach r_1.

Das 2. Segment hat den Radius r_2 und eine Höhe von $(d - r_2)$ nach d_1.

d_1 wurde (im Regelfall) schon berechnet für die Angabe des Mittelpunkts des Schnittkreises.



Bei anderer Lage sich schneidender Kugeln ist auch ein negatives d_1 möglich.

Lage des Schnittkreises: $\mathbf{d_1 = \{r_1^2 - r_2^2 + d^2\} / \{2d\}}$

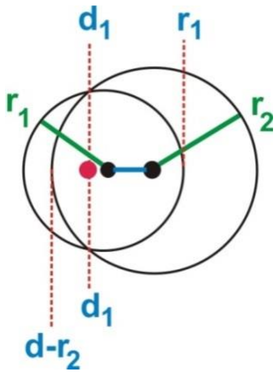
Höhe Segment 1 $\mathbf{h_1 = (r_1 - d_1)}$

Vorher hatten wir eingesehen, dass die Segmentformel auch benutzt werden darf, wenn das Volumen größer als die Halbkugel ist.

Höhe Segment 2 $\mathbf{h_2 = d_1 - (d - r_2)}$

Um aber "Flüchtigkeitsfehler" auszuschließen, wenn in der Berechnung der Höhen die Größen vertauscht wurden, ist es besser, einfach Beträge zu verwenden!

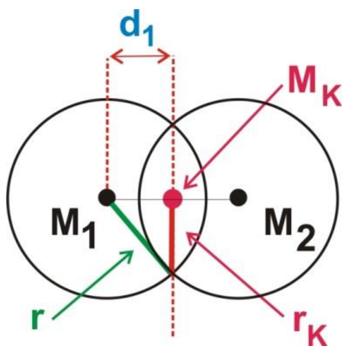
Volumen eines Kugelsegments $\mathbf{V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)}$



Es wäre übertriebener Formalismus die vorher angegebenen Beziehungen in die Formel für das Volumen einzusetzen, um eine "schönere" Endformel - mit nur noch r_1, r_2 und d - zu erhalten! Sinnvoller ist die Angabe, was jeweils einzusetzen ist.

Schnittvolumen = Segment ($\mathbf{r = r_1, h = |d_1 - r_1|}$) + Segment ($\mathbf{r = r_2, h = |d_1 + r_2 - d|}$)

Sonderfall $r_1 = r_2$



2 Kugeln mit gleichem Radius r, Entfernung d
Der Schnittkreis liegt in der Mitte, Abstand d_1 von $\mathbf{M_1}$;
$d_1 = d/2$; $r_K^2 = r^2 - d_1^2$
Gesamtes Schnittvolumen = Summe zweier gleicher Segmente
Segmentvolumen $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$; $h = r - d_1 = r - d/2$
Schnittvolumen $V = \mathbf{\frac{2\pi}{3} (r - \frac{d}{2})^2 (2r + \frac{d}{2})}$
oder ausmultipliziert $V = \mathbf{\frac{4\pi}{3} r^3 - \pi r^2 d + \frac{\pi}{12} d^3}$

In der Herleitung ist **vorausgesetzt**, dass $\mathbf{0 \le d \le 2r}$.
Die "ausmultiplizierte" Formel zeigt unmittelbar, dass bei völlig überlappenden Kugeln, d = 0, das Schnittvolumen gleich dem Kugelvolumen ist.

Beispiel $(r_1 \neq r_2)$

(Zahlenwerte für angenähert die Verhältnisse der obigen 2. Skizze)

$r_1 = 2{,}2$; $r_2 = 2{,}7$; $d = 1{,}2 \rightarrow d_1 = -0{,}4$; $h_1 = 2{,}6$; $h_2 = 1{,}1$; $S_1 = 28{,}6$; $S_2 = 8{,}6$
Schnittvolumen = $S_1 + S_2 = 37{,}2$

Wie auch in der Skizze zu sehen, ist Segment 1 größer.

Das gesamte Schnittvolumen etwas kleiner als das Volumen der 1. Kugel (44,6) und deutlich kleiner als das Volumen der 2. (82,4)

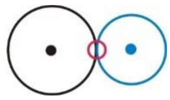
Anmerkung

Stimmen die Angaben auch für sich berührende Kugeln?

Eine legitime Antwort ist, dass "der Autor hoffentlich richtige Angaben macht"! Es geht also nur um eine kurze Verifikation!

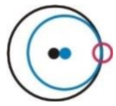
A

$d = r_1 + r_2$ (Kugeln nebeneinander)



B

$d = |r_1 - r_2|$ (Kugeln ineinander)



A: $d = r_1 + r_2$: $d_1 = \{r_1^2 - r_2^2 + (r_1 + r_2)^2\}/\{2(r_1 + r_2)\} = r_1$; $h_1 = |r_1 - r_1| = 0$;
$h_2 = |r_1 + r_2 - (r_1 + r_2)| = 0$; $S_1 = S_2 = 0$ ☑ (kein Schnittvolumen)

B: $d = |r_1 - r_2|$: $d_1 = \{r_1^2 - r_2^2 - |r_1 - r_2|^2\}/\{2|r_1 - r_2|\} = r_1$, wenn $r_1 > r_2$; $= -r_1$, wenn $r_1 < r_2$.
$d_1 = \pm r_1$: Wegen der Beträge gleiches Resultat $h_1 = h_2 = 0$; $S_1 = S_2 = 0$ ☑

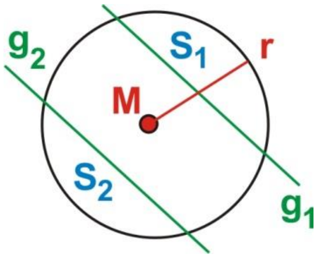
3. Schnittvolumen zwischen Ebene und Kugel - mit Übungsbeispiel

Die vorher (2 Kugeln) genannte Berechnungsvorschrift gilt sinngemäß auch hier. Aus der vorangehenden Berechnung des Schnittkreises ist der Abstand der Ebene von Kugelmittelpunkt d bekannt. Damit ist die Höhe des Segments (r - d) und dies wird in die Formel für das Segmentvolumen, $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$, eingesetzt.

- Eventuell ist man sich nicht ganz sicher, ob alle Überlegungen richtig sind, wenn der Schnitt einmal "links" und einmal "rechts" relativ zum Kreis-Mittelpunkt erfolgt. Daher ein Beispiel, wie man auch zeichnerisch seine "Gedankengänge" überprüfen könnte.

Siehe aber auch die Schlussbemerkung!

Zuerst eine **Rechnung in R^2**.



Wir starten mit einem **Kreis** K, **M**(1 | 1), r = 4
und einer **Geraden** g_1 durch $\mathbf{P_1}$(1 | 3) und $\mathbf{P_2}$(4 | -1).

Eine zweite Gerade g_2 liegt parallel zu g_1 auf der anderen Seite relativ zu **M** (mit gleichem Abstand zu **M**). Aus einer Skizze lesen wir zwei Punkte ab:
$\mathbf{Q_1}$(-1,3 | 2) und $\mathbf{Q_2}$(1,8 | -2).

Offenkundig sollten dann die beiden durch die Schnitte gebildeten Segmente S_1 und S_2 die gleiche Fläche besitzen.

Zur Berechnung des Abstand g / K benutzen wir die Hesse-Formel $d = |\mathbf{m}\cdot\mathbf{n_o} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n_o}|$.

Als Zwischenschritte (g_1) $\mathbf{a} = \mathbf{p_1}$ und $\mathbf{u} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1}$. **n** erhalten wir in R^2 einfach durch Koordinatenvertauschung und Vorzeichenwechsel. (analog für g_2)

g_1: $\mathbf{a} = \binom{1}{3}$; $\mathbf{u} = \binom{3}{-4}$; $\mathbf{n} = \binom{4}{3}$; $|\mathbf{n}| = 5$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 13$; $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 7$;
$d = |7 - 13| / 5 = 6/5 = 1,2$

g_2: $\mathbf{a} = \binom{-1,3}{2}$; $\mathbf{u} = \binom{3,1}{-4}$; $\mathbf{n} = \binom{4}{3,1}$; $|\mathbf{n}| = 5,06$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 1$; $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 7,1$;
$d = |7,1 - 1| / 5,06 = 1,21$ innerhalb der Zeichengenauigkeit gleicher Abstand wie bei g_1.

Ohne Betragsbildung unterscheiden sich die beiden d sich im Vorzeichen.
Wir "blicken von entgegengesetzten Richtungen nach **M**"!

Wer will, kann so auch genauere Angaben für $\mathbf{Q_{1,2}}$ berechnen:

g_1: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u} = \binom{1}{3} + t\binom{3}{-4}$; $d = -1,2$

$\Rightarrow$ Für g_2 ist $d = +6/5$.

$\mathbf{Q_1}$: Mit $\mathbf{q_1} = \binom{-1,3}{y}$ als Aufpunkt **a**: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n_o} = \binom{-1,3}{y}\cdot\binom{4}{3} / 5 = \mathbf{m}\cdot\mathbf{n_o} - d = 7/5 - 6/5$

$\rightarrow (-5,2 + 3\,y) / 5 = 1/5 \rightarrow y = 2,0\dot{6}$; analog für $\mathbf{q_2}$ $y = -2,0\dot{6}$.

Nun benötigen wir die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreis.

a) Wir setzen $\mathbf{a} + t\mathbf{u}$ in die Kreisgleichung ein, berechnen t und daraus die Schnittpunkte.
b) Wir erzeugen eine Geradengleichung y = kx + c und setzen diese in die Kreisgleichung ein, erhalten so x, und dann mit der Geradengleichung noch y der Schnittpunkte **X**(x | y).

Das Ergebnis solcher Rechnungen ist:

g_1: $\mathbf{X_1}$(-0,33 | 4,77); $\mathbf{X_2}$(4,25 | -1,33) - passt zur Skizze. ☑

g_2: $\mathbf{X_1}$(-2,29 | 3,28); $\mathbf{X_2}$(2,38 | -2,75) - passt zur Skizze. ☑

Damit sind die Verbindungsvektoren zwischen **M** und $\mathbf{X_i}$:

g_1: $\mathbf{v_1} = \binom{-1,33}{3,77}$; $\mathbf{v_2} = \binom{3,25}{-2,33}$ und g_2: $\mathbf{v_1} = \binom{-3,29}{2,28}$; $\mathbf{v_2} = \binom{1,38}{-3,75}$

Eine mögliche Rechenkontrolle ist die Berechnung der Beträge $|\mathbf{v_i}|$:
g_1: 3,997 und 3,999; g_2: 4,002 und 3,996 $\rightarrow$ wir gefordert gleich r ☑

(Rechnet man mit mehr Stellen, sind die Beträge jeweils 4,0000...)

Nun die Winkel zwischen $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$. $\{\cos(\alpha) = \mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2} / |\mathbf{v_1}|\cdot|\mathbf{v_2}|\}$
g_1: $\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2} = -13,12$; $\alpha = \arccos(-13,12/4\cdot 4) = 145°$ bzw. 2,532 rad
g_2: $\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2} = -13,09$; $\alpha = 145°$ bzw. 2,529 rad

In der Skizze können wir überprüfen, dass die Winkel stimmen. ☑

Die Segmentflächen sind {Bei $\sin(\alpha)$ nicht wichtig, aber bei α unbedingt Bogenmaß!}:
$S_1 = r^2\,\{\,\alpha - \sin(\alpha)\,\}/2 = 15,7$ und $S_2 = 15,6$ "gleich innerhalb Zeichengenauigkeit" ☑

- Damit haben wir - mit leider unvermeidbarem Rechenaufwand - überprüft, dass unsere Überlegungen/Formeln für die Schnittfläche Kreis/Gerade stimmen.

Um eine **Rechnung in $\mathbf{R}^3$** zeichnerisch überprüfen zu können, erweitern wir die Gerade durch einen weiteren Punkt so, dass auf der bisherigen x,y-Ebene senkrechte stehende **Ebenen** E_1 und E_2 definiert werden. Die **Kugel** K hat den bisherigen Mittelpunkt **M** und Radius r = 4. Nun sollten die beiden Segmentvolumina S_1 und S_2 gleich sein, weil unsere Skizze einen Schnitt durch die räumliche Figur darstellt!

$\mathbf{m} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$;

E_1: $\mathbf{p_1} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$; $\mathbf{p_2} = \begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\mathbf{p_3} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1} = \begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \mathbf{p_3} - \mathbf{p_1} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix}-16\\-12\\0\end{pmatrix}$ (Das ist sinnvoll, weil die Normale wieder in der x,y-Ebene liegen muss!)

$|\mathbf{n}| = 20$; $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = -28$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{p_1}\cdot\mathbf{n} = -52$: $d = \{\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{p_1}\cdot\mathbf{n}\}/|\mathbf{n}| = 1{,}2$

(Das passt zu unserer Skizze mit dem Kreis ☑)

$h = |r - d| = 2{,}8$; Segmentvolumen $S_1 = (\pi/3)\cdot r^2\cdot(3r - h) = 154$

E_2: $\mathbf{p_1} = \begin{pmatrix}-1{,}3\\2\\0\end{pmatrix}$; $\mathbf{p_2} = \begin{pmatrix}1{,}8\\-2\\0\end{pmatrix}$; $\mathbf{p_3} = \begin{pmatrix}-1{,}3\\2\\6\end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix}3{,}1\\-4\\0\end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}$; $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}-24\\-18{,}6\\0\end{pmatrix}$

(Welche z-Koordinate wir in $\mathbf{p_3}$ wählen, ist egal, nur $z \neq 0$ ist nötig.))

$|\mathbf{n}| = 30{,}4$; $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = -42{,}6$; $\mathbf{p_1}\cdot\mathbf{n} = -6$: $d = 1{,}20$

$\rightarrow$ d praktisch gleich wie bei $E_1 \Rightarrow S_2 = S_1$

- Für den Schnitt Ebene/Kugel kann die Formel direkt benutzt werden. Weitere Überlegungen zur gegenseitigen Lage sind nicht nötig.

! Das hier Durchgeführte diente als ein weiteres Beispiel zur Rechentechnik. Das "Ergebnis" - die gegenseitige Lage von Gerade und Kreis bzw. Ebene und Kugel muss nicht berücksichtigt werden - hätte man selbstverständlich durch eine einfache Argumentation einsehen können: Eine Drehung eines Gesamtgebildes in der Ebene oder im Raum ändert nicht die gegenseitigen geometrischen Beziehungen!