Kugel - Kugelgleichung, Lagebeziehungen

1. Kugelgleichung

Vorbemerkung: Die Formeln sind prinzipiell identisch mit den Formeln für den Kreis. Weil die Kugel ein Objekt in R^3 ist, kommen jetzt 3 Komponenten (bzw. Koordinaten) vor.

Eine Kugel mit dem Mittelpunkt M - Ortsvektor **m** - und dem Radius r ist beschrieben durch

$(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$ (1.1)

x ist der Ortsvektor zu einem Punkt auf der Kugeloberfläche.

(Jeder Punkt X auf der Kugel hat den Abstand r zum Mittelpunkt M.)

$(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2$ ist dabei das Skalarprodukt $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{m})$

Dies ist das Quadrat des Betrags $|\mathbf{x} - \mathbf{m}|$; $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{m}) = |\mathbf{x} - \mathbf{m}|\cdot|\mathbf{x} - \mathbf{m}|\cdot\cos(0) = |\mathbf{x} - \mathbf{m}|^2$

Mit $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ gilt in Koordinaten:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ (1.2)

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = r^2 - a^2 - b^2 - c^2$

Damit kann jede Gleichung

$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Bx + Cy + Dz + E = 0$ (1.3)

prinzipiell eine Kugel darstellen. (Die Koeffizienten vor x^2, y^2 und z^2 müssen gleich sein!)

Trivial ist, dass $A \neq 0$ gelten muss.

Zur Vereinfachung wird man durch A dividieren, B' = B/A, usw., und erhält

$x^2 + y^2 + z^2 + B'x + C'y + D'z + E' = 0.$ (1.4)

Für eine Kugel um den Koordinaten-Ursprung, $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ist

$\mathbf{x}^2 = r^2$, in Komponenten $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (1.5)

Nicht jede Gleichung $Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + D = 0$ muss eine Kugel darstellen.
$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6 = 0$ stellt keine Kugel dar, weil $x^2 + y^2 + z^2 = -2$ im Widerspruch zum geforderten $r^2 > 0$ steht.
Analog zeigt man in der allgemeinen Form (1.3), dass $B^2 + C^2 + D^2 - 4AE > 0$ gelten muss.

Um aus einer vorhandenen Gleichung (1.3) bzw. (1.4) die Vektorgleichung (1.1) bzw. (1.2) zu erhalten, benutzt man das Verfahren der "quadratischen Ergänzung".

Ein Ausdruck der Form $x^2 + px$ wird so umgeformt, dass ein quadratischer Term $(x \pm a)^2$ entsteht.
Dazu wird das Quadrat des halbierten linearen Terms addiert und subtrahiert,
also mit $\pm (p/2)^2 = \pm p^2/4$ ergänzt. Es entsteht dann $x^2 + px + p^2/4 - p^2/4 = (x + p/2)^2 - p^2/4$.

Im Regelfall wird man nicht die allgemeine Form (1.3) verwenden, sondern in der Herleitung die Zahlen einsetzen.

In der allgemeinen Formel gilt $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} -B/2A \\ -C/2A \\ -D/2A \end{pmatrix}$ und $r^2 = E/A + (B^2 + C^2 + D^2)/(4\,A^2) - E/A$

Beispiel: $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 18x + 24y - 30z + 42 = 0$
Division durch 3: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 10z + 14 = 0$
quadratische Ergänzung für x: $x^2 - 6x = x^2 - 6x + (-6/2)^2 - (-6/2)^2 = (x - 3)^2 - 9$
analog für y: $y^2 + 8y = y^2 + 8y + 16 - 16 = (y + 4)^2 - 16$
analog für z: $z^2 - 10z = z^2 - 10z + 25 - 25 = (z - 5)^2 - 25$
insgesamt: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z-2)^2 = -14 + 9 + 16 + 25 = 36$
Mittelpunkt M und Radius r durch Vergleich mit (1.2): $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $r^2 = 36$; $r = 6$

2. Lage Punkt / Kugel

Der Abstand des Punkts P zum Mittelpunkt M wird mit r verglichen.

Eine Gleichung (1.3) bzw. (1.4) ist in (1.1) umzuformen, weil **m** und r benötigt werden.
Man spart sich die Berechnung der Wurzel bei Verwendung der Abstandsquadrate:
Der quadrierte Abstand wird mit r^2 verglichen.

Beispiel: Kugel mit $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $r = \sqrt{3}$

a) P(3|4|5) $\rightarrow$ $\mathbf{m} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 4-4 \\ 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $|\mathbf{m} - \mathbf{p}|^2 = 1 + 0 + 1 = 2 < 3 \Rightarrow$ innerhalb Kugel

b) P(3|5|7) $\rightarrow$ $\mathbf{m} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 4-5 \\ 6-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $|\mathbf{m} - \mathbf{p}|^2 = 1 + 1 + 1 = 3 = 3 \Rightarrow$ auf der Kugel

c) P(3|6|9) $\rightarrow$ $\mathbf{m} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 4-6 \\ 6-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. $|\mathbf{m} - \mathbf{p}|^2 = 1 + 4 + 9 = 14 > 3 \Rightarrow$ außerhalb Kugel

3. Lage Gerade / Kugel

Anschaulich kann die Gerade

- die Kugel in zwei Punkten schneiden ("Sekante")
- die Kugel in einem Punkt berühren ("Tangente")
- an der Kugel vorbeilaufen ("Passante")

Formal suchen wir die Lösungsmenge des Systems aus der quadratischen Kugelgleichung und der linearen Geradengleichung. Dann sind zwei reelle Lösungen, eine reelle Lösung oder keine reelle Lösungen möglich.

3.1 Standardverfahren

Im Standardverfahren suchen wir Schnitt- oder Berührungspunkte.

- Für die Gerade ist zu beachten, dass es keine eindeutige Koordinatengleichung gibt.
- Ein Ausdruck g: $Ax + By + C = 0$ beschreibt eine Gerade in R^2.
  Der "erweiterte" Ausdruck $Ax + By + Cz + D = 0$ beschreibt in R^3 aber eine Ebene!
- Möglich ist die Parameterform g: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$.
- Für eine Normalenform $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o} = 0$ gilt, dass eine eindeutige Normale $\mathbf{n_o}$ nicht definiert ist.

(Siehe eventuell auch "Lineare Algebra, G04.)

Lösungsstrategie: Wenn **x** auf der Geraden in $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$ eingesetzt wird, entsteht 1 Gleichung für t. Deren Lösung wird in die Geradengleichung eingesetzt und man erhält so 2 Durchstoßpunkte oder 1 Berührungspunkt, oder es liegt eine Tangente vor, wenn es keine reelle Lösung für t gibt.

Es macht keinen Sinn, eine allgemeine (lange) Lösungsformel anzugeben. Man wendet die Lösungsstrategie auf die konkreten Angaben an!

Beispiele:

Kugel $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$, Gerade $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\,\mathbf{u}$

$(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2 \to (\mathbf{x_0} + t\mathbf{u} - \mathbf{m})^2 = r^2 \to$ Dies (in Komponenten) nach t gelöst.

$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$; $r = 3$

a) eine *Sekante*: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(6 + 2t - 4)^2 + (-7 + 5)^2 + (7 + t - 6)^2 = 9 \to (2t + 2)^2 + 4 + (t + 1)^2 - 9 = 0 \to$

$\to 4t^2 + 8t + 4 + t^2 + 2t + 1 - 5 = 5t^2 + 10t = 0 \to t_1 = 0;\ t_2 = -2$

$\Rightarrow$ 2 reelle Lösungen $\to$ 2 Durchstoßpunkte

$\mathbf{p_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p_2} = \begin{pmatrix} 6 - 4 = 2 \\ -7 \\ 7 - 2 = 5 \end{pmatrix} \to P_1(6|-7|7);\ P_2(2|-7|5)$

b) eine *Tangente*: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$(9 + 6t - 4)^2 + (-2 + t + 5)^2 + (2 - 2t - 6)^2 = 9 \to (6t + 5)^2 + (t + 3)^2 + (-2t - 4)^2 - 9 = 0 \to$

$\to 36t^2 + 60t + 25 + t^2 + 6t + 9 + 4t^2 + 16t + 16 - 9 = 41t^2 + 82t + 41 = 0 \to$

$\to t^2 + 2t + 1 = 0 \to t_{1,2} = -1 \pm \{1 - 1\}^{1/2} = -1$

$\Rightarrow$ 2 reelle (Doppel-)Lösung $\to$ 1 Berührungspunkt

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 9 - 6 = 3 \\ -2 - 1 = -3 \\ 2 + 2 = 4 \end{pmatrix} \to P(3|-3|4)$

c) eine *Passante*: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(7 + 4t - 4)^2 + (6 + 3t + 5)^2 + (5 + 2t - 6)^2 = 9 \to (4t + 3)^2 + (3t + 11)^2 + (2t - 1)^2 - 9 = 0 \to$

$\to 16t^2 + 24t + 9 + 9t^2 + 66t + 121 + 4t^2 - 4t + 1 - 9 = 29t^2 + 86t + 122 = 0 \to$

$t_{1,2} = -43/29 \pm \{[1849 - 122 \cdot 29]/29^2\}^{1/2}$ Lösung: $-43/29 \pm i\sqrt{1689}/29$

$\Rightarrow$ keine reelle Lösungen $\to$ kein Schnitt- und kein Berührungspunkt

3.2. Alternative

Eine Alternative wäre, den (senkrechten) **Abstand** vom Kugelmittelpunkt zur Geraden zu berechnen. Durch Vergleich mit dem Kugelradius können auch so die Fälle entschieden werden.

(Natürlich erhalten wir damit aber keine Information über eventuelle Durchstoßpunkte oder einen Berührungspunkt!)

Die Verfahren zur Abstandsbestimmung wurden in "Lineare Algebra, A05" (Lotfußpunktverfahren) und "A08" (über Vektorprodukt) besprochen.

Für das zweite Verfahren (Vektorprodukt) ist:

Abstand (Betrag) $d = |(\mathbf{m} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u_o}|$

Gerade g: $x = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$

Kugel-Mittelpunkt **M**(4|-5|6)

a) eine *Sekante*: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\mathbf{u}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$; $\mathbf{m} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4-6=-2 \\ -5+7=2 \\ 6-7=-1 \end{pmatrix}$

$(\mathbf{m} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u}$: Determinanten-Entwicklung

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$$

Betrag davon: $\sqrt{4+16}$; Für Abstand noch Division durch $|\mathbf{u}|$ wegen $\mathbf{u_o}$ in der Formel.

$d = \sqrt{20} / \sqrt{5} = 2$ (kleiner als Kugelradius)

b) eine *Tangente*: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$|\mathbf{u}| = \sqrt{36+1+4} = \sqrt{41}$; $\mathbf{m} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4-9=-5 \\ -5+2=-3 \\ 6-2=4 \end{pmatrix}$; $(\mathbf{m} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u}$:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5 & -3 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2\,\mathbf{i} + 14\,\mathbf{j} + 13\,\mathbf{k}$$

Betrag davon: $\sqrt{4+196+169}$; mit Division durch $|\mathbf{u}|$:

$d = \sqrt{369} / \sqrt{41} = 3$ (gleich Kugelradius)

c) eine *Passante*: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$|\mathbf{u}| = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$; $\mathbf{m} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4-7=-3 \\ -5-6=-11 \\ 6-5=1 \end{pmatrix}$; $(\mathbf{m} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u}$:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -11 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -11 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -3 & -11 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -25\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j} + 35\,\mathbf{k}$$

Betrag davon: $\sqrt{625+100+1225}$; mit Division durch $|\mathbf{u}|$:

$d = \sqrt{1950} / \sqrt{29} \approx 8{,}20$ (größer als Kugelradius)

4. Lage Ebene / Kugel

Ähnlich wie im Fall Gerade / Kugel sind 3 Fälle möglich. Durch Vergleich des senkrechten Abstands von der Ebene zum Kugelmittelpunkt d mit dem Kugelradius r:

- $d < r$: Die Ebene schneidet die Kugel. (Unendlich viele Punkte, ein Schnittkreis.)
  Ergänzend können dann der Mittelpunkt und der Radius dieses Schnittkreises bestimmt werden.
- $d = r$: Ebene und Kugel haben 1 Punkt gemeinsam. Es liegt eine Tangentialebene vor.
  Ergänzend kann dann der Berührpunkt bestimmt werden.
- $d > r$: Kein gemeinsamer Punkt.

Der Abstand Punkt / Ebene kann mit einem Lotfußpunktverfahren oder der Hesse-Abstandsformel ermittelt werden.
(Siehe eventuell auch: "Lineare Algebra, A09")

Für den Abstand zwischen Kreismittelpunkt **M** und einer Ebene mit einem Aufpunkt **A** und der Normalen **n** gilt:

$d = |(\mathbf{m} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n_o}|$ - oder aufgelöst $d = |\mathbf{m} \cdot \mathbf{n_o} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{n_o}|$ ($\mathbf{n_o} = \mathbf{n} / |\mathbf{n}|$)

(Für "schöne" Zahlen ist es oft schneller, zuerst mit **n** zu rechnen und am Ende durch $|\mathbf{n}|$ zu dividieren.)

Wenn die Ebene in der Koordinatenform oder der Hesse Normalenform gegeben ist, ist **n** direkt ablesbar. Ist die Ebene in der Parameterform gegeben, muss **n** aus den beiden Richtungsvektoren berechnet werden (z.B. über das Vektorprodukt).
In der Normalenform und der Parameterform ist **a** direkt ablesbar. In der Koordinatenform ist das Produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ ablesbar. (rechte Seite der Ebenengleichung E: $Ax + By + Cz = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$)

Für d = r und d < r wird eine Gerade von **M** senkrecht auf die Ebene definiert:
g_{ME}: **x** = **m** + t**n**
Einsetzen dieser Geraden in die Ebenengleichung liefert eine (lineare) Gleichung für t.
Einsetzen der Lösung in g_{ME} liefert den Berührungspunkt bzw. den Mittelpunkt des Schnittkreises. Für d < r wird der Radius des Schnittkreises r_K (nach Pythagoras) berechnet mit $r_K = \sqrt{r^2 - d^2}$. (Für d = r ist trivial r_K = 0.)

Beispiele (zu d<r und d = r, mit 2 verschiedenen Formen für E)

Kugel: $\mathbf{m} = \begin{pmatrix}4\\5\\-6\end{pmatrix}$; r = 8

a) *Ebene schneidet Kugel* (für E Koordinatengleichung)

E als Koordinatengleichung Ax + By + Cz = D = **a·n**

E: x + 4y + 8z = -78 → $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}$; |**n**| = $\{1 + 16 + 64\}^{1/2}$ = 9

$\mathbf{m{\cdot}n} = \begin{pmatrix}4\\5\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}$ = 4 + 20 -48 = -24; **m·n** - **a·n** = -24 - (-78) = 54;

d = 54/9 = 6 Abstand (Lot) der Ebene vom Kugelmittelpunkt

g_{ME}: $\mathbf{x} = \mathbf{m} + t\mathbf{n} = \begin{pmatrix}4+t\\5+4t\\-6+8t\end{pmatrix}$

g_{ME} in E: 4 + t + 4 (5 + 4t) + 8 (-6 + 8t) + 78 = t + 16t + 64t +4 + 20 - 48 + 78 =
= 81t +54 = 0 → t = -2/3

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}4-2/3\\5-8/3\\-6-16/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10/3\\7/3\\-34/3\end{pmatrix}$ Mittelpunkt des Schnittkreises

$r_K = \{r^2 - d^2\}^{1/2} = \{8^2 - 6^2\}^{1/2} = \sqrt{28}$ Radius des Schnittkreises

b) *Ebene berührt Kugel* (für E Normalenform)

E in Normalenform (**x** - **a**)·**n** = 0: E: $\left[x - \begin{pmatrix}-20\\10\\2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = 0$

|**n**| = 5; d = |(**m** - **a**)·$\mathbf{n_o}$|; (**m** - **a**)·**n** = $\begin{pmatrix}4+20=24\\5-10=-5\\-6-2=-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ = 72 - 32 = 40; d = 40/5 = 8

g_{ME}: $\mathbf{x} = \mathbf{m} + t\mathbf{n} = \begin{pmatrix}4+3t\\5\\-6+4t\end{pmatrix}$

g_{ME} in E: $\begin{pmatrix}4+3t+20=24+3t\\5+0t-10=-5\\-6+4t-2=-8+4t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ = 72 + 9t -32 + 16t = 25 t +40 = 0

→ t = -40/25 = -8/5; $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}4-24/5\\5\\-6-32/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4/5\\5\\-62/5\end{pmatrix}$ Berührungspunkt

$r_K = \{r^2 - d^2\}^{1/2} = \{8^2 - 8^2\}^{1/2} = 0$ Der "Schnittkreis" hat den geforderten Radius 0 ☑

Anmerkung: Wenn E als Parametergleichung E: **x** = **a** + λ**u** + μ**v** gegeben ist, berechnet man **n** aus **u** und **v**, am einfachsten mit **u** x **v**; **a** ist direkt ablesbar. Dann weiter wie a) oder b).

Ergänzung:
Zum Volumen des beim Schnitt gebildeten Segments siehe "Kugel -Schnittvolumen"

5. Lage Kugel / Kugel (Schnittkreis bzw. Berührungspunkt)

Es sind die analogen Fälle wie bei "Kreis / Kreis" möglich. Die Entscheidung ist auch hier durch Vergleich der Radien (r_1 und r_2) und des Abstands der Mittelpunkte (d) möglich. Als ergänzende Rechnung kann man den Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises bzw. den Berührungspunkt berechnen.

Berührungspunkt, wenn	$d = (r_1 + r_2)$, wenn $d > r_1$ und $d > r_2$ oder $d = \lvert r_1 - r_2\rvert$
Schnittkreis, wenn	$\lvert r_1 - r_2\rvert < d < (r_1 + r_2)$

Ergänzend kann man noch die Tangentialebene im Berührungspunkt bzw. die Ebene, in der der Schnittkreis liegt, berechnen.

Schnittkreis

Für die Berechnung des Schnittkreises sind prinzipiell zwei Wege möglich.

a) Für beide Kreise werden die Kreisgleichungen $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$ aufgestellt. Deren Differenz liefert die (lineare) Gleichung der Schnittebene. Für die Verbindungslinie $\mathbf{M_1}$ zu $\mathbf{M_2}$ wird der Vektor in Parameterform g_M: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$ aufgestellt. Einsetzen dieses Vektors in eine der Kreisgleichungen liefert eine (lineare) Gleichung für t. Mit diesem t wird der Mittelpunkt des Schnittkreises, $\mathbf{M_k}$, durch Einsetzen in g_M berechnet. Der Radius des Schnittkreises r_K wird aus dem rechtwinkligen Dreieck - siehe Skizze unten - mit den Seiten r_K, r_1 (Radius des Kreises 1, bekannt) und d_1 (Abstand zwischen $\mathbf{M_1}$, bekannt, und $\mathbf{M_k}$, vorher berechnet) erhalten ("Pythagoras").

   Der Vorteil ist die klare Konzeption, Nachteil der Rechenaufwand

b) Die geometrischen Beziehungen werden vorab allgemein berücksichtigt. Die prinzipiellen Ideen sind gleich denen bei a), die Durchführung ist verschieden.

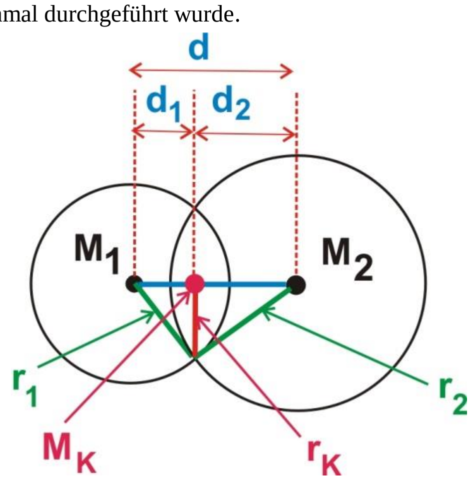
   Der Vorteil ist der geringere Rechenaufwand, wenn die Herleitung einmal durchgeführt wurde.

Schematische Skizze

Kugel 1 mit Mittelpunkt $\mathbf{M_1}$ und Radius r_1
Kugel 2 mit $\mathbf{M_2}$ und r_2.
Schnittkreis mit $\mathbf{M_K}$ und r_K.

$\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$ und $\mathbf{m_k}$ sind die Vektoren zu den jeweiligen Punkten.

Abstände der Mittelpunkte:
$d = |\overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}}|$; $d_1 = |\overrightarrow{\mathbf{M_1M_K}}|$; $d_2 = |\overrightarrow{\mathbf{M_2M_K}}|$
Verbindungsvektor $\mathbf{d} = \overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}} = \mathbf{m_2} - \mathbf{m_1}$



Der Schnittkreis liegt in einer Ebene senkrecht zu $\mathbf{d}$.

Damit ist $\mathbf{d}$ eine Normale dieser Ebene - was wir am Ende benutzen!

Nach Pythagoras gilt $r_1^2 = d_1^2 + r_K^2$ und $r_2^2 = d_2^2 + r_K^2$.
Die Differenz beider Gleichungen ist $r_1^2 - r_2^2 = d_1^2 - d_2^2$.
Mit $d = d_1 + d_2$ ergibt sich $r_1^2 - r_2^2 = d_1^2 - d^2 + 2dd_1 - d_1^2$.
Aufgelöst folgt

$$d_1 = \{r_1^2 - r_2^2 + d^2\} / \{2d\}. \tag{5.1}$$

Mit diesem d_1 ist die erste gesuchte Größe

$$r_K = \{r_1^2 - d_1^2\}^{1/2}. \tag{5.2}$$

Einsetzen von d_1 in diese Formel bringt keinen Vorteil für die Rechnung.

Für die Berechnung von $\mathbf{M_K}$ sind zwei äquivalente Argumentationen möglich.

Beide benutzen, dass $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ und $\mathbf{M_K}$ auf <u>einer</u> Geraden liegen.

1. $\mathbf{m_2} = \mathbf{m_1} + 1\cdot\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{M_2}$ hat den ganzen Abstand d von $\mathbf{M_1}$

   $\mathbf{m_k} = \mathbf{m_1} + (d_1/d)\cdot\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{M_K}$ hat den anteiligen Abstand von $\mathbf{M_1}$

2. $\mathbf{m_k} = \mathbf{m_1} + d_1$ (Betrag der Länge)$\cdot\mathbf{d}/|\mathbf{d}|$ (Einheitsvektor in dieser Richtung)

Mit den vorher berechneten $\mathbf{d}$, $d = |\mathbf{d}| = d_1 + d_2$ und d_1 ist die zweite gesuchte Größe

$$\mathbf{m_K} = \mathbf{m_1} + \left(\frac{d_1}{d}\right)\cdot\mathbf{d} \tag{5.3}$$

oder "für Liebhaber von Endformeln"

$$\mathbf{m_K} = \mathbf{m_1} + \left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{2d^2} + \frac{1}{2}\right)\cdot(\mathbf{m_2} - \mathbf{m_1}) \tag{5.4}$$

Eine Angabe allgemeiner Formeln in Koordinaten - für $\mathbf{M_1}(m_{1x}|m_{1y}|m_{2z})$ usw. - ist zwar möglich (viel Geduld oder Computeralgebra-System), aber nicht sinnvoll!

Falls auch die Ebene, in der der Schnittkreis liegt, gefragt ist, müssen nur schon vorhandene Größen richtig eingesetzt werden, falls die Normalenform oder die Koordinatengleichung gesucht wird.

(Für eine Parametergleichung müssen die Richtungsvektoren aus den vorhandenen Größen berechnet werden, siehe bei Interesse "Lineare Algebra, G05").

In "$(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$" wird für den Aufpunkt **a** $\mathbf{m_K}$ und für die Normale **n** **d** eingesetzt.

In "Ax+By+Cy=D" sind A,B,C die Koordinaten von **d**, und D = $\mathbf{m_K}\cdot\mathbf{n}$ (noch zu berechnen).

Berührungspunkt

Für zwei Kugeln, die sich in 1 Punkt berühren, ist $d_1 = r_1$ und damit $r_K = 0$.

Der Berührungspunkt - entsprechend der Berechnung von $\mathbf{m}_K$ - liegt bei

$$\mathbf{p} = \mathbf{m_1} + \left(\frac{r_1}{r_1+r_2}\right)\cdot\mathbf{d} \qquad (5.5)$$

Die Ebene "des Schnittkreises" ist dann die Tangentialebene!

♦ *Beispiele*

♦ *A Schnittkreis*

K_1: $\mathbf{M_1}(1 \mid -3 \mid 4)$; $r_1 = 4$; K_2: $\mathbf{M_2}(2 \mid -1 \mid 6)$; $r_2 = 2$

$\mathbf{d} = \mathbf{m_2} - \mathbf{m_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; $d = \{1 + 4 + 4\}^{1/2} = 3$

a) *Rechenweg 1*

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 16 \ \wedge \ (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 6)^2 = 4$

$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 8z = -10 \ \wedge \ x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 12z = -37$

Differenz: $2x + 4y + 4z = 27$ (Das ist die Schnittebene E)

Gerade durch M_1 und M_2: g_M: $\mathbf{x} = \mathbf{m_1} + t\mathbf{d} = \begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

Eingesetzt in E: $2(t + 1) + 4(2t - 3) + 4(2t + 4) = 27$ (Schnittpunkt mit E)

aufgelöst: $2t + 8t + 8t = 18t = 21 \rightarrow t = 7/6$

t eingesetzt in g_M: $\begin{pmatrix}1 + 7/6 = 13/6\\-3 + 14/6 = -2/3\\4 + 14/6 = 19/3\end{pmatrix} \rightarrow$ $\mathbf{M_K}(13/6 \mid -2/3 \mid 19/3)$ Mittelpunkt Schnittkreis

$\mathbf{d_1} = \mathbf{m_K} - \mathbf{m_1} = \begin{pmatrix}13/6 - 1 = 7/6\\-2/3 + 3 = 7/3\\19/3 - 4 = 7/3\end{pmatrix}$ (Schnittkreis-Mittelpunkt /Kugel 1-Mittelpunkt)

$d_1 = \{7^2 + 14^2 + 14^2\}^{1/2} / 6 = 21/6 = 7/2$

$r_K = \{r_1^2 - d_1^2\}^{1/2} = \{16 - 49/4\}^{1/2} = \sqrt{15}/2$ (Radius Schnittkreis)

b) *Rechenweg 2*

$d_1 = \{r_1^2 - r_2^2 + d^2\} / \{2d\} = \{16 - 4 + 9\} / 6 = 7/2$

$r_K = \{r_1^2 - d_1^2\}^{1/2} = \{16 - 49/4\}^{1/2} = \sqrt{15}/2$ (Radius Schnittkreis)

$\mathbf{m_K} = \mathbf{m_1} + \left(\frac{d_1}{d}\right)\cdot\mathbf{d} = \begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix} + (7/6)\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13/6\\-2/3\\19/3\end{pmatrix}$ (Mittelpunkt Schnittkreis)

Falls zusätzlich die Ebene, in der der Schnittkreis liegt, gefragt ist:

Normalenform: E: $[\mathbf{x} - \begin{pmatrix}13/6\\-2/3\\19/3\end{pmatrix}]\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = 0$

Für die Koordinatengleichung $\mathbf{m_K}\cdot\mathbf{n} = 13/6 - 8/6 + 76/6 = 81/6 = 27/2$

E: $x + 2y + 2z = 27/2$ oder für ganze Zahlen E: $2x + 4y + 4z = 27$

♦ *B Berührungspunkt*

Radius von K_1 geändert: $r_1 = 1$; K_2 völlig gleich
$\mathbf{m_1}$ und **d** damit wie bei A)

damit $\mathbf{p} = \mathbf{m_1} + \left(\frac{r_1}{r_1+r_2}\right)\cdot\mathbf{d} = \begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix} + (1/3)\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/3\\-7/3\\14/3\end{pmatrix}$ (Berührungspunkt)

Koordinatengleichung der Tangentialebene:

$(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{n} = 0 \rightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{n}$

$\mathbf{n} = \mathbf{d}$; $\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = 4/3 - 14/3 + 28/3 = 18/3$

E: $x + 2y + 2z = 6$

♦ *C Gleichung des Schnittkreises*

Der Schnittkreis kann nur in einer Parameterform angegeben werden! Wir benötigen zwei orthogonale Einheitsvektoren $\mathbf{u_o}$ und $\mathbf{v_o}$ in der Schnittebene.

u kann sofort angegeben werden. Die Normale auf die Ebene ist bekannt, das ist der Verbindungsvektor $|\overrightarrow{\mathbf{M_1 M_K}}|$ oder gleichwertig $\mathbf{d} = \overrightarrow{\mathbf{M_1 M_2}}$.

Daraus **u** durch "Vertauschung und Vorzeichenwechsel (Standardrezept)".

"Erinnerung": $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-b\\a\\0\end{pmatrix}$ sind orthogonal, wegen $a\cdot(-b) + b\cdot a + c\cdot 0 = 0$

$\mathbf{d} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$; $|\mathbf{u}| = \sqrt{5}$

v muss auch in der Schnittebene liegen und orthogonal zu **u** sein.

Die Forderung $\mathbf{v} \perp \mathbf{d}$ und $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ wird durch $\mathbf{v} = \mathbf{d} \times \mathbf{u}$ erfüllt.

Die Rechnung ergibt $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$; $|\mathbf{v}| = 3\sqrt{5}$.

Damit Schnittkreis k: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}13/6\\-2/3\\19/3\end{pmatrix} + \sqrt{15}/2\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos(t) + \sqrt{15}/2\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3\sqrt{5}}\cdot\sin(t)$

Setzt man dieses **x** in $(\mathbf{x} - \mathbf{m_1})^2$ ein, folgt allgemein 16, also r^2 der Kugel 1.

→ Der Schnittkreis erfüllt tatsächlich für jedes t die Kugelgleichung.
Eine allgemeine Angabe der länglichen Formel und eine manuelle Rechnung sind nicht sinnvoll, diese Rechnung sollte besser nur bei Einsatz von Computeralgebra durchgeführt werden!