Wenn die "Kreisgleichung" gesucht ist, sind der Mittelpunkt und der Radius anzugeben. Es ist möglich, dass mehrere Kreise eine Aufgabenstellung erfüllen.

1) Ein Kreis berührt die y-Achse {Punkt **A**} und geht durch die Punkte **B**(3|7) und **C**(6|4). Gesucht: Kreisgleichung
2) Ein Kreis enthält einen Punkt **A** auf der y-Achse und geht durch die Punkte **B**(3|7) und **C**(6|4). Gesucht: Kreisgleichung
3) Ein Kreis berührt die y-Achse {Punkt **A**} und die x-Achse {Punkt **B**} und geht durch den Punkt **C**(2|4). Gesucht: Kreisgleichung
4) Kreis mit **M**(0|5), r = 5.
   a) Gleichung der Tangente am Punkt P(3|1)?
   b) An welchem Punkt ist die Tangente $\mathbf{x}\cdot\binom{4}{3} = 40$?
5) Eine Gerade geht von **Q**(2|6) an den Kreis mit **M**(4|8), r = 2. Welchen Punkt erreicht man, wenn man vom Berührungspunkt **P** in gleicher Richtung denselben Betrag $\left|\overrightarrow{\mathbf{QP}}\right|$ weitergeht? {Zuerst mit einer Skizze lösen, dann rechnerisch über die Polare}
6) Eine Gerade geht von **Q**(2|4) an den Kreis mit **M**(6|8), r = 2. Gesucht: Berührungspunkte, Polare, Tangenten. (Kommazahlen erlaubt)
7) Kreis 1: **M**(2|4), r =3. Kreis 2: **M**(3|5), r = 2. Gesucht: a) Schnittfläche, b) Schnittpunkte.
8) Gegeben ist ein Kreis mit **M**(4|-3), r = 2 und ein Punkt von **P**(3|-5). Welche Schnittfläche liefert eine Parallele zur Verbindungslinie $\overrightarrow{\mathbf{PM}}$, die durch **P'**(5|1) geht?

1)

Die y-Achse ist am Punkt **A** eine Tangente an den Kreis. Mit dem noch nicht bekannten "Zwischenwert" z ist **A**(0|z). Weil $\overrightarrow{\mathbf{AM}}$ senkrecht auf der y-Achse steht, hat auch **M** diese y-Koordinate, und weil $\left|\overrightarrow{\mathbf{AM}}\right| = r$ ist die x-Koordinate r. Also: **M**(r|z).

Bekannt: **B**(3|7), **C**(6|4).

Für die drei Punkte gilt die Kreisgleichung $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$.

A: $\binom{0-r}{z-z}^2 = \binom{r}{0}^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = r^2$

B: $\binom{3-r}{7-z}^2 \Rightarrow z^2 - 14\,z - 6\,r + 58 = 0$

C: $\binom{6-r}{4-z}^2 \Rightarrow z^2 - 8\,z - 12\,r + 52 = 0$

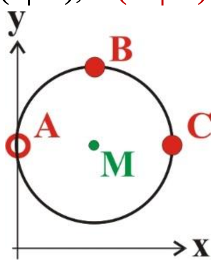
"B - C": $-6\,z + 6\,r + 6 = 0 \rightarrow r = z - 1$

Eingesetzt in "B": $z^2 - 20\,z + 64 = 0 \rightarrow z = 10 \pm 6$.

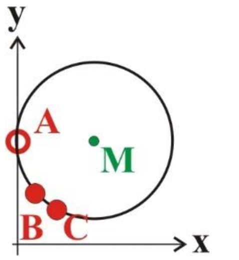
$z = 4 \rightarrow r = 3 \rightarrow$ **A**(0|4); **M**(3|4).

$z = 16 \rightarrow r = 15 \rightarrow$ **A**(0|16); **M**(15|16).

Lösungen zu
z = 4 /r = 3
z = 16 / r = 15
Gleichbleibend
B(3|7)
C(6|4)



A(0|4); **M**(3|4)



A(0|16); **M**(15|16)

Beachten: In den beiden Skizzen ist die Skalierung der Achsen verschieden!

2)

Allgemeiner als 1). Der Punkt **A** kann ein Berührpunkt oder ein Schnittpunkt sein! 1) muss dann ein Spezialfall der Lösung 2) sein.

Sofort kann angegeben werden: **A**(0|z) - mit dem unbekannten "Zwischenwert" z. Für den Kreismittelpunkt sei **M**(m_1|m_2).

Bekannt: **B**(3|7), **C**(6|4).

$(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$. (Kreis durch 3 Punkte)

Für **A:** $\begin{pmatrix} 0 - m_1 \\ z - m_2 \end{pmatrix}^2 = m_1^2 + z^2 - 2\,z\,m_2 + m_2^2 = r^2$

Für **B**: $m_1^2 + m_2^2 - 6\,m_1 - 14\,m_2 + 58 = r^2$

Für **C**: $m_1^2 + m_2^2 - 12\,m_1 - 8\,m_2 + 52 = r^2$

Die Differenz der Gleichungen für **B** und **C** ($6\,m_1 - 6\,m_2 + 6 = 0$) liefert $m_1 = m_2 - 1$.

Setzt man das in die Differenz der Gleichungen für **A** und **B** ein, erhält man

$m_2 = \{z^2 - 64\} / \{2\,z - 20\}$

$m_1 = \{z^2 - 2\,z - 44\} / \{2\,z - 20\}$

$r^2 = \{z^4 - 22\,z^3 + 222\,z^2 - 1192\,z + 3016\} / \{2\,(z - 10)^2\}$

Allgemein schneidet der Kreis die y-Achse im Punkt **A**.

In 2 Sonderfällen für z liegen **A** und **M** auf einer Parallelen zur x-Achse; y-Koordinate von **A** und **M** gleich: **A**(0|z) und **M**(m_1|z).

Aus $m_2 = z$: $z\,\{2\,z - 20\} = \{z^2 - 64\} \rightarrow z^2 - 20\,z + 64 = 0 \rightarrow z = 10 \pm 6$; z = 4; 16.

3)

Wie bei 1) kann für die Punkte auf den Achsen sofort angegeben werden: **A**(0|z) und **B**(z'|0).

Der Mittelpunkt ist dann **M**(z'|z). Weil $|\overrightarrow{\mathbf{AM}}| = |\overrightarrow{\mathbf{BM}}| = r$ ist z = z' = r.

Damit: **A**(0|r), **B**(r|0), **M**(r|r). (Siehe dazu die Anmerkung unten)

Einsetzen in $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$:

A: $\begin{pmatrix} 0 - r \\ r - r \end{pmatrix}^2 \Rightarrow r^2 = r^2$

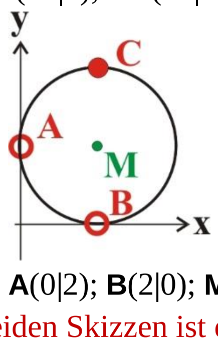
B: $\begin{pmatrix} r - r \\ 0 - r \end{pmatrix}^2 \Rightarrow r^2 = r^2$

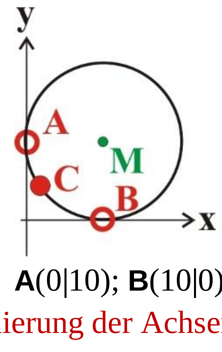
C: $\begin{pmatrix} 2 - r \\ 4 - r \end{pmatrix}^2 \Rightarrow r^2 - 12\,r + 20 = 0 \rightarrow r = 6 \pm 4$

r = 2: **A**(0|2); **B**(2|0); **M**(2|2)

r = 10: **A**(0|10); **B**(10|0); **M**(10|10)

Lösungen zu
r = 2
r = 10
Gleichbleibend
C(2|4)





A(0|2); **B**(2|0); **M**(2|2) **A**(0|10); **B**(10|0); **M**(10|10)

Beachten: In den beiden Skizzen ist die Skalierung der Achsen verschieden!

Anmerkung:

Die Koordinaten von **A**, **B**, **M** können auch über die Tangentenbedingung erhalten werden. (Einsetzen der Geradengleichung in die Kreisgleichung)

y-Achse: g: x = 0; eingesetzt in $(x-m_1)^2 + (y-m_2)^2 = r^2$

P(x|y) ist dann der Berührungspunkt der Tangente.

$m_1^2 + y^2 - 2\,y\,m_2 + m_2^2 = r^2 \rightarrow y_{1,2} = m_2 \pm \sqrt{-m_1^2 + r^2}$

Weil für die Tangente nur 1 y-Wert möglich ist, ist $-m_1^2 + r^2 = 0 \rightarrow m_1 = \pm r$
$y = m_2$ (gilt für Berührungspunkt **A**)
x-Achse: g: $y = 0$
$x^2 - 2 m_1 x + m_1^2 + m_2^2 = r^2 \rightarrow x_{1,2} = m_1 \pm \sqrt{-m_2^2 + r^2}$
$-m_2^2 + r^2 = 0 \rightarrow m_2 = \pm r$
$x = m_1$ (gilt für Berührungspunkt **B**).
Kombiniert sind das 4 Möglichkeiten: **A**$(0|\pm r)$, **B**$(\pm r|0)$, **M**$(\pm r|\pm r)$
Jeweils 1 Berührungskreis in einem Quadranten. Davon wurde vorher wegen der Lage von **C** nur der Kreis im 1. Quadranten ausgewählt.

4)

Tangente: $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = r^2$
$(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = 0$
$y = k x + c$; $k = - \Delta x/\Delta y$ $\{ -(x_P - x_M) / (y_P - y_M) \}$; $c = y_P - k x_p$

a) $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = [\, \mathbf{x} - \binom{0}{5} \,] \cdot [\, \binom{3}{1} - \binom{0}{5} \,] = \mathbf{x} \binom{3}{-4} + 20 = 25 \rightarrow \mathbf{x} \binom{3}{-4} = 5$

$(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = [\, \mathbf{x} - \binom{3}{1} \,] \cdot [\, \binom{3}{1} - \binom{0}{5} \,] = \mathbf{x} \binom{3}{-4} -5 = 0 \rightarrow \mathbf{x} \binom{3}{-4} = 5$

als Koordinatengleichung: $3 x - 4 y = 5 \rightarrow y = 3/4\, x - 5/4$

$k = - (3 - 0) / (1 - 5) = 3/4$; $c = 1 - 3/4\cdot 3 = -5/4 \rightarrow y = 3/4\, x - 5/4$

b) $\mathbf{x} \binom{4}{3} = 40$; Vergleich: $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{m}) = \mathbf{m}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{m}) + r^2$

$\mathbf{p} = \binom{4}{3} + \binom{0}{5} = \binom{4}{8}$

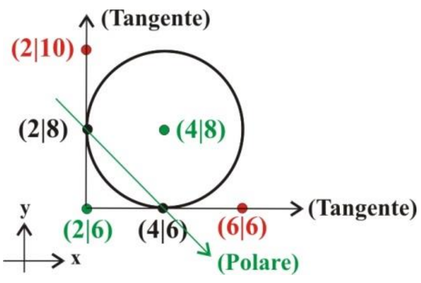
eventuell Kontrolle: $\binom{0}{5}\cdot\binom{4}{3} + r^2 = 15+25 = 40$

Umständlicher - über Koordinatengleichung:
$4x + 3y = 40 \rightarrow y = -4/3\, x + 40/3$; in Kreisgleichung eingesetzt
$x^2 + (-4/3\, x + 40/3 - 5)^2 = 25 \rightarrow (25 x^2 - 200 x + 400) / 9 = 0$
$\rightarrow x^2 - 8 x + 16 = 0 \rightarrow x = 4$ (richtig - nur 1 Nullstelle!)
$y = -16/3 + 40/3 = 8 \rightarrow P(4|8)$

5)

Zuerst: Ohne lange Rechnung!

Wegen $r = 2$ sind die beiden Berührungspunkte **P₁**$(2|8)$ und **P₂**$(4|6)$.
(Die Polare geht durch die beiden Berührungspunkte)
Die Tangenten sind Parallelen zur x- bzw. y-Achse.
"Lösungspunkte": In doppelter Entfernung von **Q**
$\mathbf{L_1}(2|10)$ und $\mathbf{L_2}(6|6)$



Rechenverfahren:

1. Berechnung der Polaren mit g: $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) = r^2$
   q Pol
   x laufender Punkt der Polaren (= Gerade durch die beiden Berührungspunkte)
2. Einsetzen von g in die Kreisgleichung $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$
   x allgemeiner Punkt auf dem Kreis, nach dem Einsetzen von g die beiden Berührungs-punkte
   (Aus dem Pol und den Berührungspunkten kann jeweils die Tangente berechnet werden.)

3. Weitere Punkte auf den Tangenten
   Die Tangenten zu den Berührungspunkte $\mathbf{P}_{1,2}$ sind $t_{1,2}$: $\mathbf{x} = \mathbf{q} + \lambda\,(\mathbf{p}_{1,2} - \mathbf{q})$
   Die Lösungspunkte sind $\mathbf{l}_{1,2} = \mathbf{q} + 2\,(\mathbf{p}_{1,2} - \mathbf{q})$

1. $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) - \mathbf{m}\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) - r^2 = 0$
   $\mathbf{q} - \mathbf{m} = \binom{2}{6} - \binom{4}{8} = \binom{-2}{-2}$
   $\binom{x}{y}\cdot\binom{-2}{-2} - \binom{4}{8}\cdot\binom{-2}{-2} - 2^2 = 0 \rightarrow -2\,x - 2\,y + 8 + 16 - 4 = 0$
   $\rightarrow y = -\,x + 10$ (das ist die Polare)
2. $(x - 4)^2 - [\,(10 - x) - 8]^2 = 4 \rightarrow x^2 - 6\,x + 8 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 2;\ 4$
   $\rightarrow \mathbf{p}_1 = \binom{2}{8};\ \mathbf{p}_2 = \binom{4}{6}$
   (Die Tangenten sind t_1: $x = 2$ {Parallele zur y-Achse} und t_2: $y = 6$ {Parallele zur x-Achse})
3. $\mathbf{p}_1 - \mathbf{q} = \binom{0}{2} \rightarrow \mathbf{l}_1 = \binom{2}{10};\ \mathbf{p}_2 - \mathbf{q} = \binom{2}{0} \rightarrow \mathbf{l}_2 = \binom{6}{6}$

6)

1. $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) - \mathbf{m}\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) - r^2 = 0$
   $\mathbf{q} - \mathbf{m} = \binom{2}{4} - \binom{6}{8} = \binom{-4}{-4}$
   $\binom{x}{y}\cdot\binom{-4}{-4} - \binom{6}{8}\cdot\binom{-4}{-4} - 3^2 = 0 \rightarrow -4\,x - 4\,y + 24 + 32 - 9 = 0 \rightarrow -4\,x - 4\,y + 47 = 0$
   $\rightarrow y = -\,x + 47/4$ bzw. $y = -\,x + 11{,}75$ (Polare)
2. $(x - 6)^2 - [\,(11{,}75 - x) - 8]^2 = 9 \rightarrow x^2 - 12\,x + 36 + x^2 - 7{,}50\,x + 14{,}07 - 9 = 0$
   $2\,x^2 - 19{,}50\,x + 41{,}07 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 3{,}08;\ 6{,}67 \rightarrow y_{1,2} = 8{,}67;\ 5{,}08$
   $\rightarrow \mathbf{P}_1(3{,}08 \mid 8{,}67)$; $\mathbf{P}_2(6{,}67 \mid 5{,}08)$ (Berührungspunkte)
3. Tangente 1
   $k = (8{,}67 - 4) / (3{,}08 - 2) = 4{,}34$; $c = 4 - 4{,}32\cdot 2 = -4{,}68$; t_1: $y = 4{,}34\,x - 4{,}68$
   Tangente 2
   $k = (5{,}08 - 4) / (6{,}67 - 2) = 0{,}23$; $c = 4 - 0{,}23\cdot 2 = 3{,}54$; t_2: $y = 0{,}23\,x + 3{,}54$

(Zahlenangaben mit 2 Nachkommastellen; gerechnet: ungerundet)

7a)

Zur Bestimmung der Schnittfläche sind nur r_1, r_2 und d (Abstand Kreismittelpunkte) wichtig. (Wie die gesamte Anordnung gedreht ist, spielt erst bei der Berechnung der Schnittpunkte eine Rolle.)

$r_1 = 3$; $r_2 = 2$; $\mathbf{M}_1(2|4)$, $\mathbf{M}_2(3|5) \rightarrow d^2 = (3-2)^2 + (5-4)^2 = 2 \rightarrow d = \sqrt{2}$.

Schnittpunkt x-Koordinate: $s = \{r_1^2 - r_2^2 + d^2\}/2d = \{9-4+2\}/2\sqrt{2} = (7/4)\sqrt{2}$ ($\approx 2{,}475$)

Öffnungswinkel 1: $\alpha_1 = 2 \arccos(s/r_1) = 1{,}201$ (rad!)

Segment 1: $A_1 = r_1^2\,[\alpha_1 - \sin(\alpha_1)]/2 = 1{,}21$

$\alpha_2 = 2 \arccos(|d-s|/r_2) = 2{,}02$; $A_2 = 2{,}25$

Schnittfläche $= A_1 + A_2 = 3{,}46$ (z.B. in cm^2, wenn Koordinaten in cm)

7b)

In 7a) wurde eine spezielle Anordnung betrachtet - beide Kreismittelpunkte auf der x-Achse. Man kann auch die y-Koordinaten der beiden Schnittpunkte berechnen und anschließend das Koordinatensystem in das Originalsystem transformieren (siehe unten als Beispiel).

Der *Standardweg* berechnet den Schnitt beider Kreise im Original-Koordinatensystem.

k_1: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9 \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$
k_2: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4 \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$
Differenz: $2x + 2y - 19 = 0$
Schnittgerade: g_S: $y = -x + 19/2$
g_S in k_1: $x^2 - (15/2)x + 101/8 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 15/4 \pm \sqrt{23}/4$ (≈ 4,95; 2,55)
$y_1 = -15/4 - \sqrt{23}/4 + 19/2 = 23/4 - \sqrt{23}/4$ (≈ 4,55); $y_2 = 23/4 - \sqrt{23}/4$ (≈ 6,95)
S_1(4,95 | 4,55); **S_2**(2,55 | 6,95)
Für den *Weg* mit der *Koordinatentransformation* ist x_S bekannt, $x_S = (7/4)\sqrt{2}$ (≈ 2,475)
Die Geometrie in dieser speziellen Anordnung ist **M_1**(0|0), **M_2**(d|0).
Die Schnittgerade ist eine Parallele zur y-Achse. → y_S durch Einsetzen von x_S in Kreis 1 →
$y_S^2 = 9 - 49/8 = 23/8 \rightarrow y_S = \pm\sqrt{23/8}$ (≈ 1,696)
Verbindungsvektor $\mathbf{d} = \mathbf{m_2} - \mathbf{m_1} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
Drehung (Speziell nach Orientierung Original): $\mathbf{D\,s} = \frac{1}{d}\cdot\begin{pmatrix}d_x s_x - d_y s_y\\ d_y s_x + d_x s_y\end{pmatrix}$
$\mathbf{s_1'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\cdot 2{,}475 - 1\cdot 1{,}696\\ 1\cdot 2{,}475 + 1\cdot 1{,}696\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}551\\ 2{,}949\end{pmatrix}$; $\mathbf{s_2'} = \begin{pmatrix}2{,}949\\ 0{,}551\end{pmatrix}$;
Verschiebung in Original-Ursprung: $\mathbf{s}$(Original) $= \mathbf{s'} + \mathbf{m_1}$
$\mathbf{s_1} = \begin{pmatrix}2{,}55\\ 6{,}95\end{pmatrix}$; $\mathbf{s_2} = \begin{pmatrix}4{,}95\\ 4{,}55\end{pmatrix}$
(Vertauschung 1,2 durch Rechenweg, aber - wie erwartet - identische Schnittpunkte zum 1. Rechenweg.)

8)
1. Suche der Schnittpunkte
1a. In Koordinaten-Formulierung
Aus **M** und **P**: $k = \Delta y/\Delta x = (-5 + 3)/(3-4) = 2$
Gerade für **P'**: $c = y - kx = 1 - 10 = -9$
Schnitt mit Kreis: $(x - 4)^2 + (2x - 9 + 3)^2 = 4 \rightarrow 5x^2 - 32x + 48 = 0 \rightarrow x = 4; 12/5$
S_1(4|-1), **S_2**(12/5|-21/5)
1b. In Vektorformulierung
Richtungsvektor $\overrightarrow{\mathbf{MP}} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$; Gerade durch **P'**: g: $\mathbf{x} = \lambda\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$
Schnitt mit Kreis: $(\mathbf{x}-\mathbf{m})^2 = [\lambda\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}]^2 \rightarrow 5\lambda^2 - 18\lambda + 17 = 4 \rightarrow \lambda_{1,2} = 1; 13/5$
$\mathbf{s_1} = \begin{pmatrix}-1+5\\-2+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$; $\mathbf{s_2} = \begin{pmatrix}-13/5+5\\-26/5+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12/5\\-21/5\end{pmatrix}$
2. Verbindungsvektoren Mittelpunkt - Schnittpunkt
$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix}4-4\\-1+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix}12/5-4\\-21/5+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8/5\\-6/5\end{pmatrix}$ (evtl. Kontrolle: $|\mathbf{v_1}| = |\mathbf{v_2}| = r$)
Winkel dazwischen: $\cos(\alpha) = \mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2} / r^2 = (-12/5)/4 = -3/5 \rightarrow \alpha = 2{,}214$ (rad)
3. Schnittfläche (Kreissegment)
$A = r^2[\alpha - \sin(\alpha)]/2 = 2{,}83$