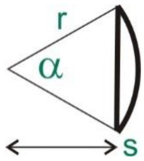
Kreis - Schnittflächen

1. Kreissegment - Formel

Man benötigt für die Berechnung von Schnittflächen (Kreis mit Kreis/Gerade) eine Formel für einen Kreisabschnitt (Kreissegment).



In einer Formelsammlung findet man für die Fläche A:

$A = r^2 (\alpha - \sin \alpha) / 2$ (1.1)

Dabei ist α der Öffnungswinkel des dazugehörenden Kreissektors.

$\alpha = 2 \arccos(s/r)$ (1.2)

α ist im Bogenmaß ("rad") einzusetzen!

s ist die x-Koordinate des Schnittpunkts, also des Beginns des Segments.

Beachte: Für die Flächenberechnung benötigen wir nur die x-Koordinate. Dies vereinfacht deutlich (!) die Rechenarbeit!

Zur Herleitung der Formeln siehe Kapitel "Integration"

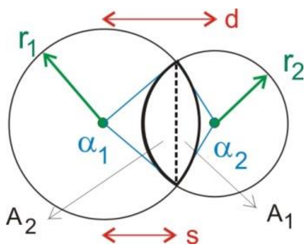
2. Schnittfläche zweier Kreise

Die gesamte Schnittfläche ist die Summe der beiden Kreissegmente

A_1 (zu Kreis 1) und

A_2 (zu Kreis 2).

Die Mittelpunkte der beiden Kreise liegen auf der x-Achse, Abstand d.



Für die Segmente gilt (1.1): $A = r^2 \{\alpha - \sin(\alpha)\} / 2$

Für die Berechnung des Öffnungswinkels benötigen wir (nur) die x-Koordinate des Schnittpunkts s. Wegen der gewählten speziellen Anordnung - beide Kreise auf der x-Achse - gilt $s = \{ r_1^2 - r_2^2 + d^2 \} / 2d$

A_1: $\alpha_1 = 2 \cdot \arccos(s/r_1)$ einsetzen in (1.1)

A_2: $\alpha_2 = 2 \cdot \arccos(|d - s|/r_2)$ einsetzen in (1.1)

Bei der manuellen Berechnung (Taschenrechner) ist darauf zu achten, dass das Bogenmaß eingestellt ist! (Zwar nicht wichtig für $\sin(\alpha)$, aber wichtig für α in der Formel.)

Sinnvollerweise wird diese Rechnung nur durchgeführt, wenn auch 2 Schnittpunkte gefunden wurden! Für die Herleitung ist es zweckmäßig, das spezielle Koordinatensystem zu benutzen, Kreise auf der x-Achse, einer im Ursprung. Es ist unmittelbar einsichtig, dass eine Rotation und Translation die Schnittfläche nicht ändert, nur die Koordinaten der Schnittpunkte ändern sich.

Beispiel

$r_1 = 2$; $r_2 = 3$; $d = 4$; (alles in cm)

Erfüllt ist $d < (r_1 + r_2)$ $\{4 < 5\}$ und $d > |r_1 - r_2|$ $\{4 > 1\}$

Schnittpunkt x-Koordinate: $s = \{ r_1^2 - r_2^2 + d^2 \} / 2d = \{ 4 - 9 + 16 \} / 8 = 11/8$

A_1: $\alpha = 2 \cdot \arccos(s/r_1) = 2 \cdot \arccos(11/16) = 1{,}6255$

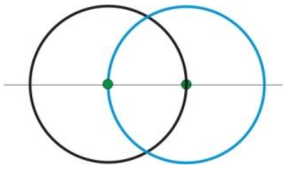
$A_1 = r_1^2 \{\alpha - \sin(\alpha) \} / 2 = 1{,}2540$

A_2: $\alpha = 2 \cdot \arccos(|d - s|/r_2) = 2 \cdot \arccos(21/24) = 1{,}0107$

$A_2 = r_2^2\{\alpha - \sin(\alpha) \} / 2 = 0{,}7358$

Gesamte Schnittfläche $A = 1{,}9898\ cm^2$

Beispiel



Zwei Kreise mit gleichem Radius r.
Der Mittelpunkt eines Kreises liegt auf dem Rand des anderen.
Gesucht: Schnittfläche - als Funktion von r.

$d = r \rightarrow$ "$s = \{ r_1^2 - r_2^2 + d^2 \} / 2d$" $\rightarrow s = d/2 = r/2$ (auch anschaulich zu sehen)

α_1: $2 \cdot \arccos(s/r) = 2 \cdot \arccos(1/2) = 2 \cdot \pi/3$ (60°)

(Auch anschaulich: Dreieck Kreismittelpunkte und 1 Schnittpunkt ist gleichseitig.)

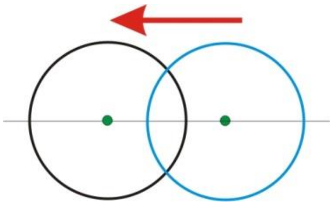
α_2: $2 \cdot \arccos(|d - s|/r) = 2 \cdot \arccos(1/2) = \alpha_1$ (auch anschaulich, symmetrische Figur)

Damit $A_1 = A_2$ und $A = r^2\{\alpha - \sin(\alpha) \}$

$\alpha = 2\pi/3$; $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$. $\rightarrow$ Schnittfläche $A = r^2 \{2\pi/3 - \sqrt{3}/2\}$ ($\approx 1{,}23\ r^2$)

Beispiel

"Sonnenfinsternis"



Mond und Sonne haben zufälligerweise von uns aus als Scheibe gesehen gleiche Flächen. Der Mond schiebt sich von links her über die Sonne. Die noch nicht bedeckte Fläche der Sonne liefert die Helligkeit. Sie nimmt von 100% auf 0% ab, wenn der Abstand der Mittelpunkte von 2r auf 0 abnimmt.
Gesucht: Verlauf der Helligkeit, in %, als Funktion des Abstands d, ausgedrückt in % des Ausgangsabstands 2r.

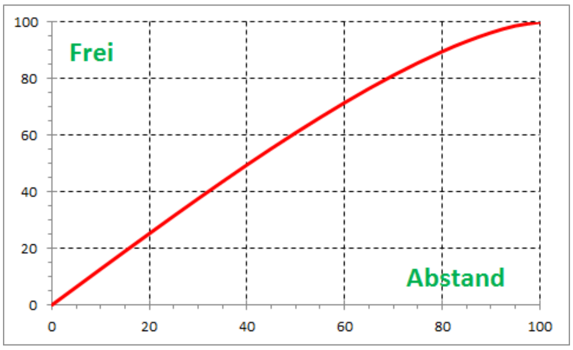
$r_1 = r_2 \rightarrow s = d/2$; $\{s/r = d/2r;\ |d - s|/r = d/2r\}$

$\alpha_1 = 2 \cdot \arccos(d/2r)$; $\alpha_2 = \alpha_1$. $\rightarrow A_1 = A_2 \rightarrow A = r^2\{\alpha - \sin(\alpha) \}$

d als Anteil von 2r: $d = t \cdot 2r \rightarrow \alpha = 2 \arccos(t)$

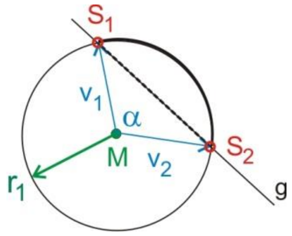
Fläche der Sonne $r^2\pi$; davon bedeckt A.

Anteil frei $= 1 - A/r^2\pi = 1 - \{ 2 \arccos(t) - \sin[2 \arccos(t)] \} / \pi$



Anteil der freien Fläche (%) gegen Abstand (% von 2r)

3. Schnittfläche zwischen Gerade und Kreis



Mit der Formel für das Kreissegment kann auch einfach diese Schnittfläche berechnet werden. Der Winkel α liegt zwischen den beiden Verbindungslinien Kreismittelpunkt zu den Schnittpunkten, $\mathbf{v_1} = \overrightarrow{MS_1}$ und $\mathbf{v_2} = \overrightarrow{MS_2}$

Die Länge dieser Linien ist jeweils gleich dem Kreisradius.

Damit $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = r \cdot r \cdot \cos(\alpha)$.

Beispiel:

Kreis k: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$; Gerade g1: $y = 4x - 7$.

Dazu wurden die Schnittpunkte S_1 und S_2 schon berechnet ("Lagebeziehung Gerade / Kreis").

$(x - 2)^2 + (4x - 4)^2 = 5 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + 16x^2 - 32x + 16 = 5$

$17x^2 - 36x + 15 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 36/34 \pm \{(36/34)^2 - (15/17)\}^{1/2} = 18/17 \pm \sqrt{69}/17$

2 Schnittpunkte: $S_1(18/17 + \sqrt{69}/17 \mid -47/17 + 4 \cdot \sqrt{69}/17)$

$S_2(18/17 - \sqrt{69}/17 \mid -47/17 - 4 \cdot \sqrt{69}/17)$

Als Vektoren geschrieben:

$$\mathbf{s_1} = \begin{pmatrix} 18/17 + \sqrt{69}/17 \\ -47/17 + 4\sqrt{69}/17 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}547 \\ -0{,}810 \end{pmatrix}; \ \mathbf{s_2} = \begin{pmatrix} 18/17 - \sqrt{69}/17 \\ -47/17 - 4\sqrt{69}/17 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}570 \\ -4{,}720 \end{pmatrix}; \ \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Verbindungslinien Kreismittelpunkt zu Schnittpunkt sind:

$$\mathbf{v_1} \approx \begin{pmatrix} -0{,}453 \\ 2{,}190 \end{pmatrix}; \ \mathbf{v_2} \approx \begin{pmatrix} -1{,}430 \\ -1{,}720 \end{pmatrix}$$

eventuell Rechenkontrolle $|\mathbf{v_1}|^2 = \{0{,}453^2 + 2{,}190^2\} \approx 5{,}001 \rightarrow$ gleich $r^2 = 5$ ☑

Skalarprodukt $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} \approx -3{,}118$; damit $\cos(\alpha) \approx -3{,}118 / (\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}) \approx -0{,}624$;

$\alpha \approx \arccos(-0{,}624) \approx 2{,}244$ (Bogenmaß)

Segmentfläche = $r^2 \{\alpha - \sin(\alpha)\} / 2 \approx 5 \{ 2{,}244 - 0{,}782 \} / 2 \approx 3{,}655$ (in cm^2, falls r etc. in cm)