Kreis - Tangente

1. Allgemeines

Eine Tangente berührt den Kreis an einem Punkt. Zwei Fragestellungen sind üblich.

- Gesucht ist die Tangente an einem gegebenen Berührpunkt.
- Gesucht ist die Tangente von einem Punkt außerhalb des Kreises (ein Pol).

Prinzipiell lässt sich die Tangente auch mit der Analysis berechnen, aber der Rechenaufwand mit der Analytischen Geometrie ist im Allgemeinen geringer.

Die Tangente an einem Berührpunkt **B** steht senkrecht auf $\overrightarrow{\mathbf{MB}}$.

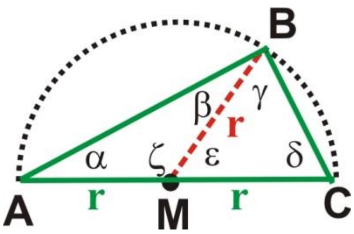
Mit der Analysis lässt sich schnell verifizieren.

2. Vorbemerkung: Satz des Thales

Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Tangente benutzt den Satz des Thales.

"Jedes Dreieck aus den beiden Endpunkten des Durchmessers und einem dritten Punkt auf dem Halbkreis ist rechtwinklig."

Es gilt also immer: $\beta + \gamma = 90°$



Eine "schöne" Herleitung mit der Annahme, dass 2 Sätze (ohne Beweis) gelten:

(1) Die Winkelsumme in jedem Dreiecks ist 180°.

(2) Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich.

Mit (2): ABM: $\alpha = \beta$; BCM: $\gamma = \delta$

Mit (1): ABM: $\alpha + \beta + \zeta = 2\,\beta + \zeta = 180°$; BCM: $\gamma + \delta + \varepsilon = 2\,\gamma + \varepsilon = 180°$

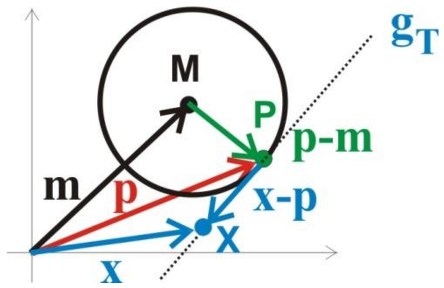
Summe: $\varepsilon + \zeta = 180°$; umgestellt: $2\,\beta = 180° - \zeta$ und $2\,\gamma = 180° - \varepsilon$

Damit: $2\,(\beta + \gamma) = 360° - (\varepsilon + \zeta) = 360° - 180° = 180° \Rightarrow \boldsymbol{\beta + \gamma = 90°}$

3. Tangente an einem Punkt auf dem Kreis

Grundidee ist, dass eine Tangente senkrecht auf dem Vektor "Mittelpunkt des Kreises zu diesem Punkt" steht. Entweder erzeugt man eine der Kreisgleichung $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$ ähnliche Formel oder verwendet diese Orthogonalität direkt.

3.1 Ähnlich Kreisgleichung



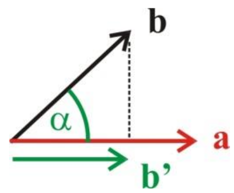
Eine Tangente g_T im Punkt P steht senkrecht auf dem Vektor $\overrightarrow{MP} = \mathbf{p} - \mathbf{m}$.
Der Richtungsvektor $\mathbf{u}$ einer Geraden $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{u}$ ist $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$.
Für die Tangente gilt $\mathbf{u} \perp (\mathbf{p} - \mathbf{m})$

Daraus: Formel mit Vektoren

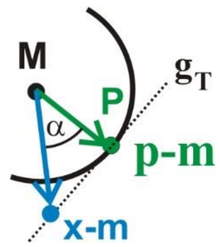
Orthogonalität: $(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = 0$ ($\mathbf{x}$ Punkt auf der Geraden) (3.1)
Kreis k: $(\mathbf{x_K} - \mathbf{m})^2 = r^2$ ($\mathbf{x_K}$ Punkt auf dem Kreis)
dies gilt auch für $\mathbf{p}$, das auch auf dem Kreis liegt.
$(\mathbf{p} - \mathbf{m})^2 = r^2$ (3.2)
identische Umformung: $(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = (\mathbf{x} - \mathbf{m}) - (\mathbf{p} - \mathbf{m})$
Eingesetzt in (3,1): $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) - (\mathbf{p} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = 0$
Mit (3.2): $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = r^2$ (3.3)
Mit $\mathbf{x} = \binom{x}{y}$ kann daraus die Geradengleichung g_T: $y = kx + c$ erhalten werden.

Ergänzende Interpretation von (3.3)

Die Kreisgleichung $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$ bedeutet, dass der Abstand $|\mathbf{x} - \mathbf{m}|$ gleich r ist. Für die Rechnungen ist es einfacher auf die Fallentscheidung beim Betrag zu verzichten und mit dem Quadrat zu arbeiten.
Die Tangentengleichung $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = r^2$ hat genauso etwas mit dem Abstand zu tun.



Wir betrachten eine Interpretation des Skalarprodukts:
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\alpha)$ ist auch
(Länge von $\mathbf{a}$) · (Länge der Projektion von $\mathbf{b}$ auf $\mathbf{a}$).
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}'|$



Für die Tangente g_T gilt:
$(\mathbf{p} - \mathbf{m})$ hat die Länge r (Kreismittelpunkt zu Kreisrand)
$(\mathbf{x} - \mathbf{m})$ hat irgendeine, nicht bekannte Länge - ABER
Die Projektion von $(\mathbf{x} - \mathbf{m})$ auf $(\mathbf{p} - \mathbf{m})$ hat auch die Länge r! *)
Damit ist das Skalarprodukt r^2!

*) eventuelle Zusatzerklärung: Nach der Skizze stimmt die Angabe der Projektion, wenn der Vektor $(\mathbf{x} - \mathbf{p})$ senkrecht auf $(\mathbf{p} - \mathbf{m})$. Dies <u>ist</u> die Orthogonalitätsbedingung für die Tangente!

3.2 Direkt Orthogonalität - mit Vektoren

$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \perp (\mathbf{p} - \mathbf{m})$, also
$(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = 0.$ (3.4)
Damit ist $(\mathbf{p} - \mathbf{m})$ eine Normale $\mathbf{n}$ auf $(\mathbf{x} - \mathbf{p})$. Die Formel $(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{n} = 0$ ist nichts anderes als die Hesse Normalenform der Geraden!

3.3 Direkt Orthogonalität - mit Koordinaten

Die Gerade zwischen den zwei Punkten M und P hat die Steigung
$k_{MP} = \Delta y / \Delta x = (y_P - y_m) / (x_p - x_m)$
Die Tangente steht senkrecht dazu. Dafür gilt
$k = k_{Tangente} = - 1 / k_{MP} = - \Delta x / \Delta y$ (3.5)
Mit $c = y_P - k\, x_P$ ist die Tangente
g_T: $y = k\, x + c$. (3.6)

Beispiel: Kreis $\mathbf{m} = \binom{2}{1}$; Punkt auf dem Kreis $\mathbf{p} = \binom{8}{9}$; $r = 10$;

a) Mit (3.3)
$(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = [\, \mathbf{x} - \binom{2}{1}] \cdot [\binom{8}{9} - \binom{2}{1}] = 100$
$\mathbf{x} \binom{6}{8} - \binom{2}{1}\cdot\binom{6}{8} = 100 \rightarrow \mathbf{x} \binom{6}{8} = 120$
"übliche" Geradengleichung: $6x + 8y = 120 \rightarrow g_T$: $y = (-3/4)\, x + 15$

b) Mit (3.4)
$(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = [\, \mathbf{x} - \binom{8}{9}] \cdot [\binom{8}{9} - \binom{2}{1}] = 0$
$\mathbf{x} \binom{6}{8} - \binom{8}{9}\cdot\binom{6}{8} = 0 \rightarrow \mathbf{x} \binom{6}{8} = 120 \rightarrow g_T$: $y = (-3/4)\, x + 15$

b) Mit (3.6)
$k = - \Delta x / \Delta y = -(8 - 2) / (9 - 1) = -3/4$
Eingesetzt: $c = y_P - k\, x_P = 9 + (3/4)\, 8 = 15 \rightarrow g_T$: $y = (-3/4)\, x + 15$

4. Tangente an einem Punkt auf dem Kreis - Analysis

Prinzipiell kann auch über die Differentialrechnung die Steigung berechnet werden. Der Rechenaufwand wird für eine Tangente von einem Pol aus und auch schon für einen Kreis, der nicht im Ursprung liegt, unangemessen groß! Wir zeigen nur, dass für eine Tangente an einem Punkt auf einem Ursprungskreis Analytische Geometrie und Analysis dasselbe Resultat für die Steigung liefern.
(Die weitere Rechnung zur vollständigen Tangentengleichung wäre dann identisch.)

Analytische Geometrie:

Kreis k: $\mathbf{x}^2 = r^2$. Punkt auf dem Kreis: $\mathbf{p} = r \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

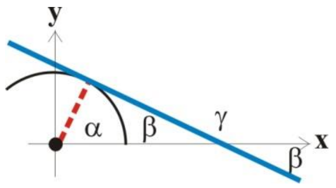
Tangente in P (3.3): $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = r^2$; für $\mathbf{m} = \mathbf{0}$; $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p} = r^2$

$\mathbf{x}\cdot\mathbf{p} = r\cdot x\cdot\cos(\alpha) + r\cdot y\cdot\sin(\alpha) = r^2 \rightarrow y = -x\cdot\cot(\alpha) + r \Rightarrow$ Steigung $\mathbf{-\cot(\alpha)}$

Analysis:

$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow y = \{r^2 - x^2\}^{1/2}$; $dy/dx = -x / \{r^2 - x^2\}^{1/2}$
(= Steigung, nur "+" von "±" bei der Wurzelbildung hingeschrieben)

Für einen Punkt mit $x = r \cos(\alpha)$:
$dy/dx = - r \cos(\alpha) / \{r^2 - r^2 \cos^2(\alpha)\}^{1/2} =$
$= - r \cos(\alpha) / r \sin(\alpha) = \mathbf{- \cot(\alpha)}$ (wie vorher)



Damit ist auch schnell gezeigt, dass die Tangente senkrecht auf $\overrightarrow{\mathbf{MB}}$ steht. Der Berührpunkt ist **B**($r \cos(\alpha)|r \sin(\alpha)$). Die Steigung von $\overrightarrow{\mathbf{MB}}$ damit $\sin(\alpha)/\cos(\alpha) = \tan(\alpha)$. Zwei Geraden sind orthogonal, wenn für die Steigungen k $k_1 = - 1/k_2$ ist. $\{1/\tan(\alpha) = \cot(\alpha)\}$

Es mag sein, dass man sich am "Cotangens" stört. Für eine Gerade muss doch "Tangens" gelten! ("... haben wir mal so gelernt") Der Punkt für die Tangente ist mit dem Winkel α definiert worden.

β ist dann 90° - α und γ = 180° - β = 90° + α.

Im Gegenuhrzeigersinn ist gemäß Skizze $\alpha < 90°$, $\gamma > 90°$, die Gerade (Tangente) hat eine negative Steigung.

$-\cot(\alpha)$	$= -\cot(\gamma - 90°)$	Zusammenhang, siehe Skizze
	$= +\cot(90° - \gamma)$	"Formelsammlung "$\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$"
	$= +\tan(\gamma)$	"Formelsammlung "$\cot(90° - \alpha) = \tan(\alpha)$

Das ist der "gewohnte Tangens" und weil $\tan(\gamma) < 0$ für $90° < \gamma < 180°$ auch das richtige Vorzeichen der Steigung.

5. Tangente von einem Pol aus

Von einem Punkt Q außerhalb des Kreises k sind die Tangenten an den Kreis gesucht. Symmetrisch zur Verbindungslinie $\overrightarrow{MQ}$ sind die Berührungspunkte mit dem Kreis P und P'.

5.1 Geometrisch (Thaleskreis)

Eine geometrische Konstruktion ist möglich mit dem Thaleskreis.

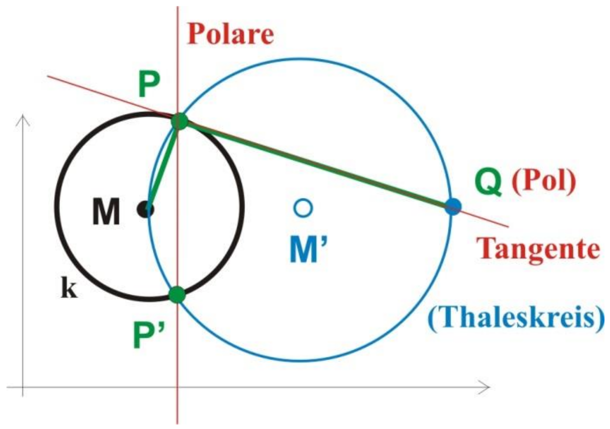
Der Punkt Q wird "Pol" genannt.

Der Thaleskreis wird mit dem Mittelpunkt M' (Mitte zwischen M und Q) und dem Radius $|\overrightarrow{MQ}|$ gezeichnet.

Dieser Thaleskreis schneidet k in zwei Punkten P und P'. Die Dreiecke M-P-Q und M-P'-Q müssen dann rechtwinklig sein.

Die Tangenten gehen dann durch P und Q, bzw. P' und Q.

Die Linie durch P und P' wird "Polare" genannt.



Die Forderung, dass die Tangente im Berührungspunkt P senkrecht auf $\overrightarrow{MP}$ steht, ist durch den Thaleskreis erfüllt.

5.2 Rechnerische Durchführung (Thaleskreis)

Der Vektor der Verbindungslinie $\overrightarrow{MQ}$ ist **q** - **m**.

Für den Mittelpunkt M' ist der Vektor $(1/2)\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) + \mathbf{m} = (1/2)\cdot(\mathbf{q} + \mathbf{m})$

Aus der Subtraktion der Kreisgleichung k und des Thaleskreises k_T ergibt sich eine lineare Gleichung. (Dies ist die "Polare" - siehe nächster Abschnitt.)

$$k: (\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2 \qquad (5.1)$$

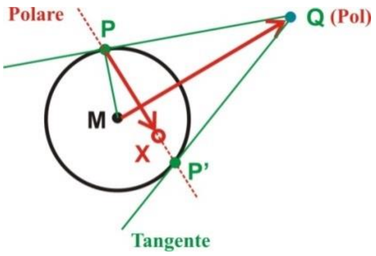
$$k_T: (\mathbf{x} - \mathbf{m}')^2 = r_T^2 = \{(1/2)\,|\mathbf{q} - \mathbf{m}|\}^2 \qquad (5.2)$$

x steht für einen Punkt auf dem Kreis und dem Thaleskreis. Weil wir den Schnittpunkt suchen, gleiches **x** in (5.1, 5.2).

Die Koordinaten der Berührungspunkte P und P' folgen aus dem Einsetzen in eine der Kreisgleichungen. Mit 2 Punkten kann man die Tangentengleichung in der Form "y = kx + c" angeben.

5.3 Über Polare und Berührungspunkte

Eine geeignete Orthogonalitätsbedingung und die Tatsache, dass die beiden Tangenten symmetrisch zur Linie Q-M liegen, werden benutzt.



Die Polare geht durch die Berührungspunkte P und P'.
X sei ein laufender Punkt auf dieser Geraden.
($\mathbf{x}$ - $\mathbf{p}$) steht senkrecht auf ($\mathbf{q}$ - $\mathbf{m}$).

Orthogonalität: $(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) = 0$ (5.3)

Für eine Tangente wurde angegeben (3.3): $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = r^2$.
Darin: $\mathbf{x}$ laufender Punkt auf der Tangente, $\mathbf{p}$ Punkt auf dem Kreis.

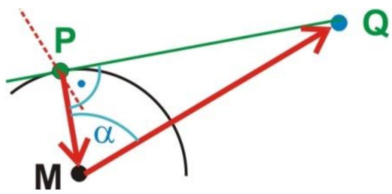
Hier ordnen wir zu:

Als "laufenden Punkt auf der Tangente" kennen wir den Pol $\mathbf{q}$.

Wenn (5.3) für jeden Punkt auf der Tangente gilt, gilt es natürlich auch für einen Punkt $\mathbf{q}$!

Als "Punkt auf dem Kreis" kennen wir den Berührungspunkt $\mathbf{p}$.

Damit $(\mathbf{q} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = r^2$ (5.4)



Man kann (5.4) auch noch anders interpretieren:
$|\mathbf{p}\text{-}\mathbf{m}| = r$ aus der Definition des Kreises.
Die Projektion von ($\mathbf{q}$-$\mathbf{m}$) auf ($\mathbf{m}$-$\mathbf{p}$) hat die Länge $|\mathbf{q}\text{-}\mathbf{m}|\cos(\alpha)$. Und diese ist gleich r!
Ganz genau: Auch noch $|\mathbf{p}\text{-}\mathbf{m}| = |\mathbf{m}\text{-}\mathbf{p}|$.
$(\mathbf{q}\text{-}\mathbf{m})\cdot(\mathbf{p}\text{-}\mathbf{m}) = |\mathbf{q}\text{-}\mathbf{m}|\,|\mathbf{p}\text{-}\mathbf{m}|\cos(\alpha) = r^2$

Addition (5.3) + (5.4): $(\mathbf{p} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) + (\mathbf{q} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = r^2 \rightarrow$
$\rightarrow (\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) = r^2$ (5.5)

Der Schnitt mit dem Kreis liefert als Spezialfall des allgemeinen Punkts auf der Polaren $\mathbf{x}$ die Vektoren der Berührungspunkte, $\mathbf{p}$ und $\mathbf{p}'$.

Die Form "y = kx +c" für die Tangenten wird am einfachsten aus den bekannten zwei Punkten P (P') und Q errechnet.

5.4 Alternative "Herleitung" (Berührungspunkte und Polare)

In einer anderen Herleitung benutzt man am Schluss die in 5.3 vorausgesetzte Definition der Polaren.

{Die Herleitung ist nicht exakt, weil am Schluss das Ergebnis scheinbar in Widerspruch zur anfangs eingesetzten Bedingung steht. Der Grund dafür wird genannt!}

Eine Tangente durch den Pol Q und den Berührungspunkt P ist orthogonal zum Radiusvektor $\overrightarrow{MP}$. (Bedingung für eine Tangente)

Orthogononalität: $(\mathbf{p} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = 0$ (5.6)

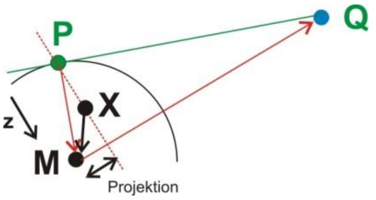
Zusätzlich liegt der Berührungspunkt auf dem Kreis:
k: $(\mathbf{p} - \mathbf{m})^2 = r^2$ (5.7)
Subtraktion (5.6) - (5.7):
$(\mathbf{p} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{p}) - (\mathbf{p} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{m}) = r^2 \rightarrow (\mathbf{p} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) = r^2$ (5.8)

Obwohl nach der Herleitung dies eine Bedingung für den Berührpunkt P sein sollte, liefert die Auflösung in Koordinaten eine lineare Gleichung! Wir erhalten also wieder, wie in (5.5) in Wirklichkeit die Gleichung der Polaren!

Die weitere Rechnung wie in 5.3.

Das ist also keine überzeugende Herleitung!

Grund ist die Definition des Skalarprodukts:
$|\mathbf{q}\text{-}\mathbf{m}| \cdot$ |Projektion von $(\mathbf{p}\text{-}\mathbf{m})$| hat denselben Wert wie $|\mathbf{q}\text{-}\mathbf{m}| \cdot$ |Projektion von $(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{m})$|.
(5.8) ist notwendig für $\mathbf{p}$, aber nicht hinreichend.



Formal: $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{z} \rightarrow (\mathbf{x}\text{-}\mathbf{m})\cdot(\mathbf{q}\text{-}\mathbf{m}) = (\mathbf{p}+\lambda\mathbf{z}\text{-}\mathbf{m})\cdot(\mathbf{q}\text{-}\mathbf{m}) =$
$= (\mathbf{p}\text{-}\mathbf{m})\cdot(\mathbf{q}\text{-}\mathbf{m}) + \lambda\mathbf{z}\cdot(\mathbf{q}\text{-}\mathbf{m}) = r^2 + 0\ \{\mathbf{z} \perp (\mathbf{q}\text{-}\mathbf{m})\}$.

(5.5) ist also besser als (5.8), weil darin eindeutiger $\mathbf{x}$ als laufender Punkt auf der Polaren bezeichnet ist. In (5.8) müsste man jeweils angeben, ob der laufende Punkt oder der feste Punkt (Berührungspunkt) gemeint ist.

5.5 Beispiel

Beispiel: Kreis $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; Pol $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$; r = 5; $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Thaleskreis

$(\mathbf{q} - \mathbf{m}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\{|\mathbf{q} - \mathbf{m}|\}^2 = 34$; $r_T^2 = (1/4) \cdot 34$

Mittelpunkt M' $(1/2)(\mathbf{q} - \mathbf{m}) = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -11/2 \end{pmatrix}$

k: $[\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}]^2 = 25$; k_T: $[\,\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 7/2 \\ -11/2 \end{pmatrix}]^2 = 17/2$

k: $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 25$
k_T: $x^2 - 7x + 49/4 + y^2 + 11y + 121/4 = 17/2$
$k - k_T$: $3x - 5y = 46$ (dies ist die Gleichung einer "Polaren")
Einsetzen von $y = (3/5)x - (46/5)$ in k:
$x^2 - 4x + 4 + (9/25)x^2 - (276/25)x + (2116/25) + (18/5)x - (276/5) + 9 - 25 = 0$
$(34/25)x^2 - (286/25)x + (436/25) = 0 \rightarrow 17x^2 - 143x + 218 = 0$
$\rightarrow x = (143/34) \pm (75/34) \rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = (109/17)$
Einsetzen von x_i: $y_1 = (6/5) - (46/5) = -8$; $y_2 = (327 - 782)/(5\cdot17) = -(91/17)$

Berührpunkte: $\mathbf{p_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p_2} = \begin{pmatrix} 109/17 \\ -91/17 \end{pmatrix}$

Tangente "y = kx + c" aus 2 Punkten (P und Q):
P_1: $k = \Delta y/\Delta x = (-8 + 8)/(2 - 5) = 0$; $c = -8 - 0\cdot5 = -8$
$\Rightarrow$ Tangente 1: $y = -8$ (Parallele zur x-Achse)
P_2: $k = (-91/17 + 8)/(109/17 - 5) = 15/8$; $c = -8 - 75/8 = -139/8$
$\Rightarrow$ Tangente 2: $y = (15/8)x - 139/8$

Über Polare

Für den laufenden Punkt auf der Polaren gilt (5.5): $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) = r^2$

$[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}]\cdot[\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}]\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} - 21 = 25$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 46 \rightarrow 3x - 5y = 46$ (Polare, wie vorher - bei "Thaleskreis" als "$k - k_T$")

Die weitere Rechnung ist identisch zum Vorigen.

Weil die "weitere Rechnung" den umfangreicheren Teil bildet, ist es für den Rechenaufwand unerheblich, ob man die ersten Schritte über den Thaleskreis oder die Polare durchführt. In beiden Verfahren wird praktisch dieselbe Orthogonalitätsbeziehung verwendet.

6. Tangente von einem Pol aus - Koordinatentransformation

→ Nicht als vorgeschlagener Rechenweg, sondern als formale Übung.

Für die Berechnung der Berührpunkte und der Tangenten sind nur die relative Lage des Pols zum Ursprung und der Kreisradius wichtig.

6.1 Spezieller Fall: Ursprungskreis mit Radius r und Pol Q auf der x-Achse.

Diesen einfachsten Fall kann man schnell allgemein rechnen

Die Tangentengleichung $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{m}) = r^2$ vereinfacht sich dann zu $\mathbf{x}\cdot\mathbf{q} = r^2$.

Wegen der speziellen Lage des Pols Q(q | 0) gilt $\binom{x}{y}\cdot\binom{q}{0} = x\cdot q = r^2$.

Dies ist die Gleichung für alle möglichen Berührpunkte, die "Polare". Durch eine "gedankliche" Skizze ist einsichtig, dass keine Bedingung für y vorliegt. Die Polare ist in diesem Fall parallel zur y-Achse.

Der Schnitt mit der Kreisgleichung liefert die beiden Berührpunkte, P_1 und P_2.

$x = r^2/q$ eingesetzt in $\mathbf{x}^2 = r^2$ ist: $y^2 = r^2 - x^2$ $(= r^2 - r^4/q^2)$: $\mathbf{p}_{1,2} = \begin{pmatrix} r^2/q \\ \pm\sqrt{r^2 - r^4/q^2} \end{pmatrix}$

Zur Berechnung der Tangenten liegen damit jeweils 2 Punkte, Q und ein Berührpunkt P, vor.

(Diese abschließende Rechnung nicht mehr in allgemeiner Form)

6.2 Allgemein - kein Ursprungskreis, $\overrightarrow{MQ}$ nicht parallel zur x-Achse

Nun liege der Kreis nicht mehr im Ursprung und Q liege nicht mehr auf einer Parallelen zur x-Achse. Bezogen auf den vorigen speziellen Fall haben wir eine Translation und eine Rotation. Wir verwenden die Zahlenwerte von 5.5

Originalsystem: Kreis $\mathbf{m} = \binom{2}{-3}$; Pol $\mathbf{q} = \binom{5}{-8}$; r = 5

Im speziellen System soll sein $\mathbf{m'} = \binom{0}{0}$; Pol $\mathbf{q'} = \binom{q'}{0}$.

Im speziellen System: Berührpunkte P':

$x = r^2/q' = 25 / \sqrt{34}$; $y^2 = r^2 - x^2 \rightarrow y = \pm\, 15 / \sqrt{34}$

Die Translation ist trivial zu behandeln, $+ \binom{2}{-3}$ verschiebt M von (0 | 0) nach (2 | - 3). Diese Verschiebung gilt dann auch für alle anderen Punkte.

Für **q'** müssen wir die Entfernung von **m** und die Orientierung relativ zur x-Achse kennen.

Die Entfernung des Pols ist $|\mathbf{q} - \mathbf{m}| = \left|\binom{3}{-5}\right| = \sqrt{34} = \mathbf{q'}$.

Den Winkel φ berechnen wir aus dem Skalarprodukt von (**q** - **m**) und dem Einheitsvektor in Richtung x-Achse: $\cos(\varphi) = \binom{3}{-5}\cdot\binom{1}{0} / \sqrt{34} = 3 / \sqrt{34}$

Das ist der Winkel zwischen $\overrightarrow{MQ}$ und x-Achse im Uhrzeigersinn.

Für eine Drehung um den Koordinatenursprung gilt die Matrix $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Ohne Umweg über arccos(φ) ist $\sin(\varphi) = \{1 - \cos^2(\varphi)\}^{1/2} = 5 / \sqrt{34}$

Damit $\mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

6.3 Durchführung der Transformation

Gedanklich haben wir bei der Erzeugung der Anordnung im speziellen System zuerst M in den Ursprung (0 | 0) verschoben und dann so gedreht, dass Q auf der x-Achse liegt. Dies müssen wir nun durch eine Rechnung wieder rückgängig machen. Dann erhalten wir die Koordinaten der Berührpunkte im Originalsystem.

Das wurde in "Kreis (2), 6." detailliert beschrieben!

Zuerst also die Drehung. (**p** - **m**) wurde um dem Winkel φ in Richtung x-Achse gedreht. Rückgängig müssen wir um den Winkel -φ drehen. Die entsprechende Drehmatrix $\mathbf{D}^{-1}$ ist leicht anzugeben, weil cos(-φ) = cos(φ) und sin(-φ) = -sin(φ).

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$; $\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Man könnte das zusätzlich durch $\mathbf{D}\,\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{E}$ kontrollieren.

$\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{p}'_1 = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 25 \\ -15 \end{pmatrix} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 0 \\ -170 \end{pmatrix}$

Als Zweites die Verschiebung. Das wurde schon oben angegeben, $\underline{\mathbf{T}}^{-1} = +\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{p}_1$ (im Originalsystem) = $\begin{pmatrix} 0+2 \\ -170/34-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

Dasselbe für $\mathbf{p}_2$. Zuerst die Drehung:

$\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{p}'_2 = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 25 \\ +15 \end{pmatrix} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 150 \\ -80 \end{pmatrix}$

Dann die Verschiebung:

$\mathbf{p}_2$ (im Originalsystem) = $\begin{pmatrix} 150/34+2 \\ -80/34-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 109/17 \\ -91/17 \end{pmatrix}$

Die restliche Rechnung - bis zu den Tangenten - ist identisch zum vorher Angegebenen (Kapitel 5.)