Kreis - Parameterdarstellung

1. Parameterdarstellung in R^2
2. Kreis in R^3

1. Parameterdarstellung (in R^2)

Ein Kreis kann auch durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{m} + r\,\mathbf{v} \qquad (1.1)$$

beschrieben werden. Wie vorher ist **x** der Ortsvektor zu einem Punkt auf dem Kreis, **m** der Vektor zum Mittelpunkt. **v** muss die Länge 1 haben und über einen Parameter sollen damit alle Punkte auf dem Kreis erreicht werden.

Dies ist möglich mit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Wegen $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ stimmt die Länge.

Für $0 \le t < 2\pi$ werden alle Punkte erreicht. {Andere t sind für Leute, die in anderer Richtung oder mehrfach um einen Kreis wandern wollen.}

- Ein unmittelbarer Vorteil dieser Beschreibung gegenüber $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$ ist nicht erkennbar. In R^3 ist eine ähnliche Parameterdarstellung aber nötig, um einen Kreis beschreiben zu können!

2. Kreis in R^3

Die Gleichung $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$ beschreibt in R^3 eine Kugel! {Trivialerweise haben alle Punkte auf einer Kugel den Abstand r vom Mittelpunkt.} Für einen Kreis muss eine Parameterdarstellung gewählt werden. Diese definiert auch indirekt eine Ebene, in der der Kreis liegt.

Als Vorbereitung nochmals die Parameterdarstellung in R^2. Die Gleichung $\mathbf{x} = \mathbf{m} + r\,\mathbf{v}$ bedeutet "ausführlich" angeschrieben, $\mathbf{x} = \mathbf{m} + r\cos(t)\,\mathbf{e_x} + r\sin(t)\,\mathbf{e_y}$ mit den Einheitsvektoren (Basisvektoren) der kartesischen Ebene. Dabei liegt $\mathbf{e_x}$ senkrecht zu $\mathbf{e_y}$ (orthogonal).

Die Orthogonalität der Basisvektoren ist nicht unbedingt notwendig, nur die lineare Unabhängigkeit, also $\mathbf{e_x} \neq \lambda \cdot \mathbf{e_y}$, muss gelten. Die Wahl einer orthogonalen Basis ist "üblich", und sie bietet allgemein auch Vorteile bei der Arbeit mit Koordinaten, z.B. für das Skalarprodukt.

Speziell ist der Teil " $r\cos(t)\,\mathbf{b_1} + r\sin(t)\,\mathbf{b_2}$ " mit zwei Einheitsvektoren $\mathbf{b_i}$ zu betrachten. Dessen Länge muss für jedes t den Wert r haben! Für das Quadrat der Länge gilt das Skalarprodukt

$r^2\cos^2(t)\,\mathbf{b_1}\cdot\mathbf{b_1} + r^2\sin^2(t)\,\mathbf{b_2}\cdot\mathbf{b_2} + 2\,r^2\cos(t)\sin(t)\,\mathbf{b_1}\cdot\mathbf{b_2}$

$\mathbf{b_1}\cdot\mathbf{b_1} = \mathbf{b_2}\cdot\mathbf{b_2} = 1$. Aber $\mathbf{b_1}\cdot\mathbf{b_2}$ hat einen beliebigen Wert, und nur 0, wenn $\mathbf{b_1}$ senkrecht auf $\mathbf{b_2}$!

Nur mit dieser Wahl "orthogonal" folgt insgesamt der geforderte Vektor der Länge r!

In gleicher Weise ist in R^3 auch ein Kreis zu beschreiben. **m** ist der Vektor zum Mittelpunkt. Es werden zwei Einheitsvektoren $\mathbf{b_1}$ und $\mathbf{b_2}$ benötigt, die in der gewünschten Ebene liegen. Üblicherweise werden auch diese zwei Vektoren orthogonal gewählt.

Damit

$$\mathbf{x} = \mathbf{m} + r\cos(t)\,\mathbf{b_1} + r\sin(t)\,\mathbf{b_2},\ 0 \le t < 2\pi \qquad (2.1)$$

Warum genügen nicht einfach zwei linear unabhängige Vektoren in der Ebene? Die Begründung - jeder Punkt auf dem Kreis muss den Abstand r haben - wurde schon vorher (für R^2) gegeben.

Die Aufgabe "Kreis in R^3" ist damit auf das Problem "Suche zwei orthogonale Vektoren in einer Ebene" zurückgeführt. Ein zweckmäßiger Lösungsweg ist:

(1) Bestimmung eines Vektors in der Ebene. (Anschließend auf Länge 1 normieren.)

(2) Der zweite Vektor steht senkrecht auf dem ersten und senkrecht zur Normalen auf die Ebene.

(Dafür entweder Skalarprodukt oder eleganter Vektorprodukt.
"Bei Bedarf" Weiteres dazu unter "Mathematik - Lineare Algebra, Kapitel G**")

Die Parameterform des Kreises in R^3 genügt natürlich auch der Gleichung $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$.
$(\mathbf{x}-\mathbf{m})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{m}) = r^2 \cos^2(t)\, \mathbf{b_1}\cdot\mathbf{b_1} + 2\, r^2 \cos(t) \sin(t)\, \mathbf{b_1}\cdot\mathbf{b_2} + r^2 \sin^2(t)\, \mathbf{b_2}\cdot\mathbf{b_2} = r^2$,
weil $\mathbf{b_1}$ und $\mathbf{b_2}$ orthonormal sind.

- Die Aussage, "man kann in R^3 keinen Kreis beschreiben", ist falsch.
  Die Aussage, "$(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$ gilt für einen Kreis in R^3 nicht", ist falsch.
  Richtig ist, "$(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$ gilt nicht für <u>einen</u> Kreis, sondern für <u>alle</u>, die in der mit der Gleichung definierten Kugel liegen". Die Formel ist nicht anwendbar zur <u>eindeutigen</u> Definition <u>eines</u> Kreises.

<u>Beispiel</u>

Ein Kreis mit dem Radius r soll in der Ebene durch die 3 Punkte $P_{1,2,3}$ liegen. Der Ursprung liegt auf P_1. $P_1(1 | 2 | 3)$, $P_2(4 | 5 | 6)$, $P_3(6 | 4 | 2)$.

Richtungsvektoren $\mathbf{u} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$, weil es nur auf die Richtung ankommt: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\mathbf{v} = \mathbf{p_3} - \mathbf{p_1} = \begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}$

Normale der Ebene aus $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$.

In der Koordinaten- oder der Normalenform wäre $\mathbf{n}$ direkt ablesbar.

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 5 & 2 & -1\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & -1\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix} = -3\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + -3\,\mathbf{k}$$

Damit Normale, nach Kürzen auf möglichste einfache Zahlen $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

Für $\mathbf{m}$ kann irgendein Punkt der Ebene benutzt werden, wir wählen am einfachsten einen der gegebenen Punkte, z.B. P_1. Als erstes Vektor irgendein Vektor in der Ebene, am einfachsten einer der Richtungsvektoren, wir wählen $\mathbf{u}$.

$|\, \mathbf{u}\, | = \{ 1+1+1 \}^{1/2} = \sqrt{3}$; damit $\mathbf{b_1} = (1/\sqrt{3}) \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$

Der zweite Vektor steht senkrecht auf $\mathbf{b_1}$ und $\mathbf{n}$, bzw. $\mathbf{u}$ und $\mathbf{n}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} = -3\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$

Wieder gekürzt und durch den Betrag $\sqrt{2}$ dividiert, $\mathbf{b_2} = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Kreis: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cos(t)\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix} + r\sin(t)\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$