Kreis - Lagebeziehung Kreis / Kreis

5. Lage Kreis / Kreis

5.1 Mögliche Fälle

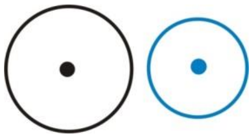
Wir nehmen an, dass Kreisgleichungen vorliegen, aus denen Mittelpunkt und Radius ablesbar sind. Gegebenenfalls muss vorher eine Umformung erfolgen, siehe Kapitel 1.

d ist der Abstand der Mittelpunkte, $d = |\overrightarrow{M_1M_2}|$

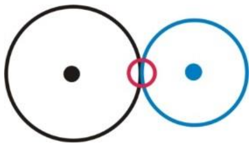
Anschaulich sind möglich

(1) Die Kreise sind identisch
Die Mittelpunkte und die Radien sind gleich,
$M_1 = M_2$, $r_1 = r_2$ ($d = 0$)

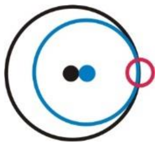
(2) Die Kreise berühren sich nicht und
Kreis 2 liegt außerhalb von Kreis 1
$d > (r_1 + r_2)$



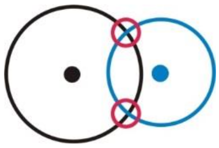
(3a) Die Kreise berühren sich in einem Punkt
$d = (r_1 + r_2)$, wenn $d > r_1$ und $d > r_2$
(Kreise außerhalb)



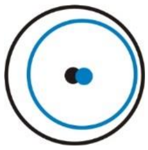
(3b) Die Kreise berühren sich in einem Punkt
$(d + r_2) = r_1$, wenn $d < r_1$ (K2 in K1) oder
$(d + r_1) = r_2$, wenn $d < r_2$ (K1 in K2)
$\Rightarrow d = |r_1 - r_2|$



(4) Die Kreise schneiden sich (in zwei Punkten)
$d < (r_1 + r_2)$ und $d > |r_1 - r_2|$
$\Rightarrow |r_1 - r_2| < d < (r_1 + r_2)$



(5) Ein Kreis liegt völlig im Innern des anderen
$(d + r_2) < r_1$ (K2 in K1) oder
$(d + r_1) < r_2$ (K1 in K2)
$\Rightarrow d < |r_1 - r_2|$



5.2 Berechnung von Schnittpunkten

♦ 1. Berechnung im Original-Koordinatensystem

Die Suche von Schnittpunkten ist einfach zu formulieren.
Schnittpunkte **x** müssen auf beiden Kreisen liegen. Also sind **x** zu suchen, die beide Gleichungen $(\mathbf{x} - \mathbf{m}_1)^2 = r_1^2$ und $(\mathbf{x} - \mathbf{m}_2)^2 = r_2^2$ erfüllen.

Explizit für Koordinaten gilt
$(x - m_{1x})^2 + (y - m_{1y})^2 = r_1^2$ und $(x - m_{2x})^2 + (y - m_{2y})^2 = r_2^2$
Wenn man die Quadrate auflöst, $x^2 - 2\,x\,m_{1x} + m_{1x}^2$, usw., und die beiden Gleichungen subtrahiert, erhält man ("prinzipiell") eine lineare Gleichung in x und y.
$y = \{ x\,(2\,m_{2x} - 2\,m_{1x}) + m_{1x}^2 - m_{2x}^2 + m_{1y}^2 - m_{2y}^2 - r_1^2 + r_2^2 \} / \{ 2\,(m_{1y} - m_{2y}) \}$
Setzt man dieses y in eine der Kreisgleichungen ein, erhält man x des Schnittpunkts. Mit der Geradengleichung wird dann y des Schnittpunkts berechnet. Wegen der quadratischen Gleichung in x folgen im allgemeinen Fall auch zwei Schnittpunkte. Die (ziemlich lange) allgemeine Lösung wird nicht mehr angegeben.

⇒ Offenkundig ist dieser allgemeine Weg nicht sinnvoll!
Zahlenwerte für m_{1x} ... r_2 in eine allgemeine Endformel einzusetzen, ist ein für manuelle Rechnungen ungeeigneter Weg!.

⇒ Ein <u>möglicher Lösungsweg</u> ist, von Anfang an die Zahlenwerte einzusetzen!

♦ 2. Alternative: Spezielles Koordinatensystem

Weil für die Suche nach Schnittpunkten nur die drei Größen d, r_1 und r_2 relevant sind, ist der Weg über eine Koordinatentransformation (im 1. Teil der Rechnung) <u>formal eleganter</u>!

Kreis 1 wird in den Koordinatenursprung gelegt, und Kreis 2 liegt im Abstand d auf der x-Achse. Damit sind einige Koordinaten 0, was den Rechenaufwand verringert. Die Schnittpunkte in diesem speziellen Koordinatensystem sind schneller berechenbar. Man erhält eine Schnittgerade, parallel zur y-Achse (oder 1 Punkt auf der x-Achse).
Einsetzen des x in k1 (oder k2) liefert y des Schnittpunkts.

Das lässt sich leichter allgemein lösen.
Schnittpunkt x-Koordinate $s = \{ r_1^2 - r_2^2 + d^2 \} / 2d$
Eingesetzt in k1: $s^2 + y^2 = r_1^2$
Schnittpunkt y-Koordinate: $y = \pm \{ 2r_1^2 r_2^2 + 2r_1^2 d^2 + 2r^2 d^2 - r_1^4 - r_2^4 - d^4 \}^{1/2} / 2d$

Anstelle der Verwendung dieser allgemeinen Lösung ist es sinnvoller, s mit der Formel zu berechnen und y aus $\{r^2 - s^2\}^{1/2}$ zu errechnen und von Anfang an mit den gegebenen Zahlenwerten für r_1, r_2 und d zu arbeiten.

Allerdings muss dann das Resultat (Schnittpunkte) wieder auf das Originalsystem rücktransformiert werden. Diese Transformation enthält nicht nur eine Translation, wie vorher in Kapitel 4.3, sondern (im allgemeinen Fall) auch eine Rotation.

<u>Rücktransformation der Schnittpunkte auf das Original-Koordinatensystem</u>

$\mathbf{d} = \mathbf{m_2} - \mathbf{m_1} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$ Koordinaten im Originalsystem → liefert Abstand d

Die Verschiebung erfolgte so, dass $\mathbf{M_1}$ im Ursprung des speziellen Systems liegt und $\mathbf{M_2}$ im Abstand d auf der x-Achse. **d** ist der Vektor für den Abstand der Kreismittelpunkte im Originalsystem.

$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix}$ Koordinaten eines Schnittpunkts im speziellen System

Die Transformation für die Drehung ist explizit: $\mathbf{s'} = \mathbf{T}\,\mathbf{s} = \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} d_x s_x - d_y s_y \\ d_y s_x + d_x s_y \end{pmatrix}$

(Für **s'** liegt dieselbe Orientierung wie im Originalsystem vor, nur der Nullpunkt ist noch verschoben.)

Dann ist noch die Translation in das Originalsystem nötig:
$\mathbf{s}_{\mathbf{Original}} = \mathbf{s'} + \mathbf{m_1}$.

⇒ Insgesamt ist der manuelle Rechenaufwand damit größer!

⇒ Herleitung von **T** (für Interessierte) unter "Koordinatentransformationen"

5.3 Beispiel: 2 Schnittpunkte - Rechenweg im Original-Koordinatensystem

k1: $\mathbf{m}_1 = \binom{1}{2}$; $r_1 = 3$; k2: $\mathbf{m}_2 = \binom{4}{-2}$; $r_1 = 4$;

$d = \{(1-4)^2 + (2+2)^2\} = 5$; weil $d < r_1 + r_2$ erwarten wir 2 Schnittpunkte - Fall (4).

k1: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9$ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

k2: $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 16$ $x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = 16$

k1 - k2: $6x - 8y - 8 = 0$; $y = (3/4)\,x - 1$; dies ist die Gleichung der Schnittgeraden.

Schnittgerade in k1 eingesetzt: $x^2 + (9/16)\,x^2 - (3/2)\,x + 1 - 2x - 3\,x + 4 - 4 = 0$

geordnet: $(25/16)\,x^2 - (13/2)\,x + 1 = 0$; $x^2 - (104/25)x + 16/25 = 0$;

$x_{1,2} = 52/25 \pm \{\,2704/625 - 400/625\}^{1/2} = (52 \pm 48)/25 = 4/25;\ 4.$

$y_1 = (3/4)\cdot 4/25 - 1 = -22/25$; $y_2 = (3/4)\cdot 4 - 1 = 2$

Schnittpunkte $S_1(4/25|-22/25)$
$S_2(4|2)$

5.4 Beispiel: 2 Schnittpunkte - Rechenweg über spezielles Koordinatensystem

Schnittpunkte im speziellen System

Kreis 1 liegt im Koordinatenursprung, Kreis 2 bei x = d auf der x-Achse

k1: $\mathbf{m}_1 = \binom{0}{0}$; $r_1 = 3$; k2: $\mathbf{m}_2 = \binom{d}{0}$; $r_1 = 4$;

k1: $x^2 + y^2 = 9$

k2: $(x-d)^2 + y^2 = 16 \rightarrow$ mit $d = 5$: $x^2 - 10\,x + y^2 + 9 = 0$

k1 - k2: $10\,x = 18 \rightarrow x = 9/5$ (die Schnittgerade ist parallel zur y-Achse!)

eingesetzt in k1: $y^2 = 9 - 81/25 = 144/25 \rightarrow y = \pm\, 12/5$

Schnittpunkte: $S_1(9/5|12/5)$
$S_2(9/5|-12/5)$

Rücktransformation

$\mathbf{m_1} = \binom{1}{2}$; $\mathbf{m_2} = \binom{4}{-2}$ (Koordinaten im Originalsystem)

$\mathbf{d} = \mathbf{m_2} - \mathbf{m_1} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ (-2)-2 \end{pmatrix} = \binom{3}{-4}$; $d = \{3^2 + (-4)^2\}^{1/2} = 5$;

Ergebnis der Rechnung im speziellen System:

$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 9/5 \\ 12/5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 9/5 \\ -12/5 \end{pmatrix}$ (Koordinaten im speziellen System)

Formeln für die Rücktransformation in das Originalsystem:

$\mathbf{s}' = \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} d_x s_x - d_y s_y \\ d_y s_x + d_x s_y \end{pmatrix}$ (Rücktransformation Drehung in Originalsystem)

$\mathbf{s_{Original}} = \mathbf{s}' + \mathbf{m_1}$; (Rücktransformation Translation in Originalsystem)

Schnittpunkt 1: {entspricht $\mathbf{S_2}$ in der Rechnung 5.3}

$\mathbf{s}_1' = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 9/5 - (-4) \cdot 12/5 \\ (-4) \cdot 9/5 + 3 \cdot 12/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75/25 \\ 0 \end{pmatrix} = \binom{3}{0}$ Drehung

$\mathbf{s}_{1,\text{Original}} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \binom{4}{2}$ Translation (jetzt: Koordinaten im Originalsystem)

Schnittpunkt 2:

$$s_2' = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 9/5 \cdot -12/5 \\ (-4) \cdot 9/5 + 3 \cdot -12/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21/25 \\ -72/25 \end{pmatrix} \text{ Drehung}$$

$$s_{2,\text{Original}} = \begin{pmatrix} -21/25 + 1 \\ -72/25 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/25 \\ -22/25 \end{pmatrix} \text{ Translation (jetzt: Koordinaten im Originalsystem)}$$

Bis auf die umgekehrte Reichenfolge werden - auf Umwegen(!) - dieselben Schnittpunkte $\mathbf{S_{1,2}}$ wie in der vorigen Rechnung (5.3 direkt im Originalsystem) erhalten! Vorteil: einfachere quadratische Gleichungen. Der gesamte Rechenaufwand ist aber nicht geringer.

5.5 Ergänzung - Sonderfälle bei der Berechnung des Schnittpunkts

Die Sonderfälle müssen auch erkennbar sein, wenn man (voreilig) sofort den Schnittpunkt berechnet.

Sinnvoll ist nur die Diskussion im speziellen System - Anordnung beider Kreise auf der x-Achse. Im allgemeinen Fall (Originalanordnung der Kreise), der durch eine Drehung und eine Translation aus dem speziellen System entsteht, ist die Situation gleich aber die Rechnungen sind umständlicher.

Für die Schnittpunkte gilt:

x-Koordinate: $x = \{ r_1^2 - r_2^2 + d^2 \} / 2d$

y-Koordinate: Einsetzen des x in Kreis 1 oder Kreis 2

Fall 1: identische Kreise, $r_1 = r_2$, $d = 0$: x = "0/0". Der Schnittpunkt ist undefiniert.

Fall 2: Kreise außerhalb, zu weit entfernt, $d > r_1 + r_2$: Die Rechnung liefert eine Lösung x; wenn man aber die y-Koordinate berechnet, folgt eine imaginäre Zahl. Es gibt also keinen reellen Schnittpunkt.

Fall 3a: Die Kreise berühren sich, $d = r_1 + r_2$:
$x = \{ r_1^2 - r_2^2 + r_1^2 + 2 r_1r_2 + r_2^2 \} / 2\{ r_1 + r_2 \} = 2r_1\{ r_1 + r_2 \} / 2\{ r_1 + r_2 \} = r_1$
Die y-Koordinate ist 0. Wie erwartet, liegt der Schnittpunkt auf einem Kreis und auf der x-Achse.

Fall 3b: Die Kreise berühren sich, $d = |r_1 - r_2|$:
Rechnung für $r_1 > r_2$; für die andere Möglichkeit eine gleichartige Rechnung; insgesamt liegt der Schnittpunkt bei $x = \pm r_1$
$x = \{ r_1^2 - r_2^2 + r_1^2 - 2 r_1r_2 + r_2^2 \} / 2\{ r_1 - r_2 \} = 2r_1\{ r_1 - r_2 \} / 2\{ r_1 - r_2 \} = r_1$
Weitere Rechnung: y = 0. Schnittpunkt auf der x-Achse.
Bei einer "allgemeinen Lage" der beiden Kreise liegt der Schnittpunkt bei Fall 3 auf der Verbindungsgeraden durch die beiden Kreismittelpunkte.

Fall 5: Ein Kreis im Innern des andern. Die Rechnung liefert eine reelle Lösung x, aber eine imaginäre Lösung y; es gibt also keinen (reellen) Schnittpunkt.

Obwohl es also prinzipiell möglich ist, ohne Überlegungen sofort die Rechnung auf Schnittpunkte durchzuführen, ist dies nicht sinnvoll! Wesentlich schneller werden die Sonderfälle durch die Kriterien (5.1 Mögliche Fälle) erkannt.