4. Lage Gerade / Kreis

Anschaulich kann die Gerade

- den Kreis in zwei Punkten schneiden ("Sekante")
- den Kreis in einem Punkt berühren ("Tangente")
- am Kreis vorbeilaufen ("Passante")

Formal suchen wir die Lösungsmenge des Systems aus der quadratischen Kreisgleichung und der linearen Geradengleichung. Dann sind zwei reelle Lösungen, eine reelle Lösung oder keine reelle Lösungen möglich.

> Man setzt man die lineare in die quadratische Gleichung ein, löst nach x, und berechnet dann y mit der Geradengleichung.

Es ist zwar möglich, allgemeine Formeln anzugeben, z.B. gilt für die x-Koordinate des Schnittpunkts eines Kreises k: $x^2 + y^2 = r^2$ mit der Geraden $y = kx + c$:
$x_{1,2} = \{ - kc \pm [r^2(1+k^2) - c^2]^{1/2} \} / \{1 + k^2\}$.

Für einen Kreis k: $(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$ gilt eine längere Formel. Es ist sinnvoll, von Anfang an mit den Zahlenwerten einer Aufgabenstellung zu arbeiten!

4.1 Standardweg: Kreis nach $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, Gerade in der Form "$y = kx + c$"

Beispiel 1: "Schnittpunkte"

Kreis k: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$; $(a = 2, b = -3)$; Gerade g1: $y = 4x - 7$.

g1 in k: $(x - 2)^2 + (4x - 4)^2 = 5 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + 16x^2 - 32x + 16 = 5$

$\rightarrow 17x^2 - 36x + 15 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 36/34 \pm \{(36/34)^2 - (15/17)\}^{1/2} = 18/17 \pm \sqrt{69}/17$

{y durch Einsetzen in g1}

$\rightarrow$ 2 Schnittpunkte $S_1(18/17 + \sqrt{69}/17 \mid -47/17 + 4\cdot\sqrt{69}/17)$

$S_2(18/17 - \sqrt{69}/17 \mid -47/17 - 4\cdot\sqrt{69}/17)$

Beispiel 2: "Berührungspunkt"

Kreis k: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$; Gerade g2: $y = -2x + 6$.

g2 in k: $(x - 2)^2 + (-2x + 9)^2 = 5 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 36x + 81 = 5$

$\rightarrow 5x^2 - 40x + 80 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$

$\rightarrow x_{1,2} = 4 \pm \{16-16\}^2 = 4$; $y = (-2)\cdot 4 + 6 = -2$

$\rightarrow$ 1 Berührungspunkt $B(4 \mid -2)$

Im 3. Fall ist {...} bei $x_{1,2}$ negativ, es existiert also *keine reelle Lösung*.

4.2 Vektorformulierung: Kreis nach $(\mathbf{x}\text{-m})^2 = r^2$, Gerade $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\,\mathbf{u}$

Wie vorher wird die Geradengleichung in die Kreisgleichung eingesetzt.

$$(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2 \rightarrow (\mathbf{x_0} + t\mathbf{u} - \mathbf{m})^2 = r^2 \qquad (4.1)$$

Als *Zahlenbeispiel* dieselbe Situation *wie* im *Beispiel 2* "Berührungspunkt"

$\{k: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5;\ g2: y = -2x + 6\}$

$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; eine mögliche Form von g2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die Lösung von (4.1) liefert t, und daraus folgt durch Einsetzen von t in g2 der Schnittpunkt **x**.

$\mathbf{x_0} + t\mathbf{u} - \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 1 + t - 2 \\ 4 - 2t + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 1 \\ -2t + 7 \end{pmatrix}$;

$(\mathbf{x_0} + t\mathbf{u} - \mathbf{m})^2 = t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 28t + 49 = 5\,t^2 - 30t + 50; \rightarrow t^2 - 6t + 9 = 0;$

$t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3$; Berührungspunkt: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 + 3\cdot 1 \\ 4 + 3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

4.3 Über Verschiebung in den Koordinaten-Ursprung -"Umständlich aber lehrreich"

Ein Kreis ist "am kürzesten" formuliert, wenn **m** der Koordinatenursprung ist.

Ohne langes Nachdenken schreiben wir dann sofort: $(\mathbf{x} - \mathbf{0})^2 = \mathbf{x}^2 = r^2$

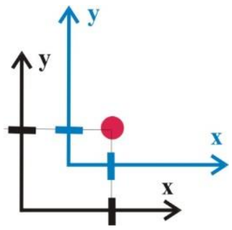
Vorteil ist, dass mit $x^2 + y^2 = r^2$ ein Schnitt einfacher zu berechnen ist als mit $(x\text{-}a)^2 + (y\text{-}b)^2 = r^2$.

{Insgesamt ist der Rechenaufwand aber nicht wesentlich geringer als mit der direkten Methode. Dieser Weg ist eher zum Verständnis von Koordinatentransformationen nützlich.}

4.3.1 In Koordinaten-Schreibweise

Bei einem Wechsel des Koordinatensystems haben wir

- stets jeweils dasselbe Objekt, aber
- die Koordinaten in verschiedenen Koordinatensystemen sind verschieden!.



Für einen Punkt ist das unmittelbar einsichtig, für die Gleichung einer Geraden muss etwas überlegt werden.

Zuerst die Überlegung, was wir beim Kreis gemacht haben. Der Kreismittelpunkt **M** hat im alten Koordinatensystem die Koordinaten **M**(a|b), im neuen **M**(0|0).

Durch die Translation wurden die Koordinaten von **M** geändert,

$x_{neu} = x_{alt} - a;\ y_{neu} = y_{alt} - b$

Für den Kreis

$(\mathbf{x_{alt}} - \mathbf{m_{alt}})^2 = r^2;\ \mathbf{x_{neu}}^2 = r^2.$

Dieselbe Translation wie für den Kreis muss nun auch für die Gerade durchgeführt werden.

Ziel ist eine Gleichung in den neuen Koordinaten, $y_{neu} = k'\cdot x_{neu} + c'$.

Gesucht ist der Zusammenhang. Wie hängen k' und c' mit k und c zusammen?

Lösung: Einsetzen des Zusammenhangs in die "alte" Geradengleichung.

$y_{alt} = k\,x_{alt} + c \Rightarrow (y_{neu} + b) = k \cdot (x_{neu} + a) + c \Rightarrow y_{neu} = k\cdot x_{neu} + c + k\cdot a - b$

Die **Punkte** auf der Geraden haben nun **andere Koordinaten**, die **Steigung** der Geraden bleibt **gleich**, der **Achsenabschnitt** ist **verschieden**, c' = c + k·a - b ist der Zusammenhang.

Anschaulich kann eine Verschiebung die Steigung einer Geraden nicht ändern. (Erst eine Drehung)

Als Zahlenbeispiel wieder *Beispiel 2 "Berührungspunkt"*.
{k: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$; g2: $y = -2x + 6$}

Alt: x und y sind Koordinaten im alten System
Kreis k: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$; Gerade g2: $y = -2x + 6$;
$B_{alt}(4|-2)$.

Nun die Verschiebung des Kreismittelpunkts $\mathbf{M}_{alt}(a|b) = \mathbf{M}_{alt}(2|-3)$ nach $\mathbf{M}_{neu}(0|0)$:

Neu: x und y sind nun Koordinaten im neuen System
Kreis k: $x^2 + y^2 = 5$; Gerade g2: $y = -2x -4 + 6 + 3 = -2x +5$
g2 in k eingesetzt, der Schnittpunkt hat dann die Koordinaten (x|y)
$x^2 + 4x^2 -20x +25 = 5$; $x^2 -4x + 4 = 0$; **x = 2; y** $= -2 \cdot 2 + 5$ **= 1;**
$B_{neu}(2|1)$.

Umrechnung: $x_{alt} = x_{neu} + a = 2 + 2 = 4$; $y_{alt} = y_{neu} + b = 1 + (-3) = -2$. ☑

4.3.2 In Vektor-Schreibweise

Die Verschiebung $\mathbf{x}_{neu} = \mathbf{x}_{alt} - \mathbf{m}$ liefert aus $(\mathbf{x}_{alt} - \mathbf{m})^2 = r^2$ das gewünschte $\mathbf{x}_{neu}{}^2 = r^2$.

Die Gerade ist als $\mathbf{x} = \mathbf{x_o} + t\,\mathbf{u}$ gegeben - in alten Koordinaten.

Der Richtungsvektor **u** (Steigung) ändert sich bei einer Verschiebung nicht.

(Falls nötig, zu zeigen durch Verschiebung zweier Punkte und $\mathbf{u} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$.)

Der Aufpunkt der Geraden ist verschoben: $\mathbf{x}_{o,neu} = \mathbf{x}_{o,alt} - \mathbf{m}$.

Der allgemeine Punkt **x** der Geraden ist damit $\mathbf{x}_{o,neu} + t\,\mathbf{u} = \mathbf{x}_{o,alt} - \mathbf{m}_{alt}$.

Schnittpunkt altes System: $\mathbf{x} = \mathbf{x_o} + t\,\mathbf{u}$ in $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$ eingesetzt.

Schnittpunkt neues System: $\mathbf{x}_{o,neu} + \mathbf{t\,u}$ in $\mathbf{x^2 = r^2}$ eingesetzt.

{Dann nach t auflösen, und t in Geradengleichung einsetzen.}

Als Zahlenbeispiel wieder *Beispiel 2 "Berührungspunkt"*
{k: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$; g2: $y = -2x + 6$; bzw. g2: $\mathbf{x} = \mathbf{x_o} + t\mathbf{u} = \binom{1}{4} + t\binom{1}{-2}$}

$\mathbf{m} = \binom{2}{-3}$; $\mathbf{x_o} = \binom{1}{4}$; $\mathbf{u} = \binom{1}{-2}$ (Koordinaten im alten System)

$\mathbf{x}_{o,neu} = \mathbf{x}_{o,alt} - \mathbf{m} = \binom{1}{4} - \binom{2}{-3} = \binom{-1}{7}$

Gerade g2 eingesetzt in $\mathbf{x^2} = r^2$:

$$(\mathbf{x_o} + t\,\mathbf{u})^2 = \binom{-1+t}{7-2t}^2 = 1 - 2t + t^2 + 49 - 28t + 4t^2 = r^2$$

$$\to 5t^2 -30t +50 = 5 \to t^2 - 6t + 9 = 0 \to t = 3.$$

Berührungspunkt $\mathbf{x} = \binom{-1+3=2}{7-6=1} \to B_{neu}(2|1)$.

Rücktransformation $\mathbf{x} = \binom{2+2=4}{1-3=-2} \to B_{alt}(4|-2)$.