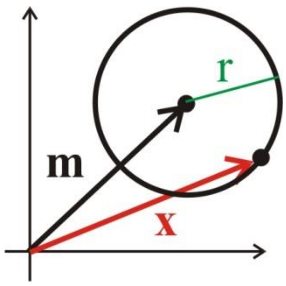
Kreis - Kreisgleichung (+ Lagebeziehung Punkt / Kreis)

1. Kreisgleichung
2. Kreis durch 3 Punkte
3. Lage Punkt / Kreis

1. Kreisgleichung

Ein Kreis mit dem Mittelpunkt **M** - Ortsvektor **m** - und dem Radius r ist beschrieben durch
$(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$
x ist der Ortsvektor zu einem Punkt auf der Kreislinie.
(Jeder Punkt **X** auf dem Kreis hat den Abstand r zum Mittelpunkt **M**.)



Allgemeine Gleichung

$(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$ (1.1)

$(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2$ ist dabei das Skalarprodukt $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{m})$
Dies ist das Quadrat des Betrags $|\mathbf{x} - \mathbf{m}|$; $(\mathbf{x} - \mathbf{m})\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{m}) = |\mathbf{x} - \mathbf{m}|\cdot|\mathbf{x} - \mathbf{m}|\cdot\cos(0) = |\mathbf{x} - \mathbf{m}|^2$

Mit $\mathbf{x} = \binom{x}{y}$ und $\mathbf{m} = \binom{a}{b}$ gilt in Koordinaten:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (1.2)

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2$

Damit kann jede Gleichung

$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$ (1.3)

prinzipiell einen Kreis darstellen. (Die Koeffizienten vor x^2 und y^2 <u>müssen</u> gleich sein!)

Trivial ist, dass $A \neq 0$ gelten muss.

Zur Vereinfachung wird man durch A dividieren, B' = B/A, usw., und erhält

$x^2 + y^2 + B'x + C'y + D' = 0.$ (1.4)

Für einen Kreis um den Koordinaten-Ursprung, $\mathbf{m} = \binom{0}{0}$, ist

$\mathbf{x}^2 = r^2$, in Komponenten $x^2 + y^2 = r^2$ (1.5)

Nicht jede Gleichung $Ax^2 + Ay^2 + D = 0$ muss einen Kreis darstellen.
$3x^2 + 3y^2 + 6 = 0$ stellt keinen Kreis dar, weil $x^2 + y^2 = -2$ im Widerspruch zum geforderten $r^2 > 0$ steht.
Analog zeigt man in der allgemeinen Form (1.3), dass $B^2 + C^2 - 4AD > 0$ gelten muss.

Um aus einer vorhandenen Gleichung (1.3) bzw. (1.4) die Vektorgleichung (1.1) bzw. (1.2) zu erhalten, benutzt man das Verfahren der "quadratischen Ergänzung".

Ein Ausdruck der Form $x^2 + px$ wird so umgeformt, dass ein quadratischer Term $(x \pm a)^2$ entsteht.
Dazu wird das Quadrat des halbierten linearen Terms addiert und subtrahiert,
also mit $\pm (p/2)^2 = \pm p^2/4$ ergänzt. Es entsteht dann $x^2 + px + p^2/4 - p^2/4 = (x + p/2)^2 - p^2/4$.

Im Regelfall wird man nicht die allgemeine Form (1.3) verwenden, sondern in der Herleitung die Zahlen einsetzen.

In der allgemeinen Formel gilt $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} -B/2A \\ -C/2A \end{pmatrix}$ und $r^2 = (B^2 + C^2)/(4\,A^2) - D/A$

Beispiel: $2x^2 + 2y^2 - 12x + 16y - 48 = 0$
Division durch 2: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 24$
quadratische Ergänzung für x: $x^2 - 6x = x^2 - 6x + (-6/2)^2 - (-6/2)^2 = (x - 3)^2 - 9$
analog für y: $y^2 + 8y = y^2 + 8y + 16 - 16 = (y + 4)^2 - 16$
insgesamt: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 24 + 9 + 16 = 49$
Mittelpunkt M und Radius r durch Vergleich mit (1.2): $\mathbf{m} = \binom{3}{-4}$; $r = 7$

2. Kreis durch 3 Punkte

Durch 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, kann ein Kreis gelegt werden.
Rechnerisch ist dies lösbar

a) Einsetzen der Punkte in die Kreisgleichung und Lösung des Systems der drei Gleichungen. "Logisch" ist dies am einfachsten. Es entstehen 3 quadratische Gleichungen. Durch geeignete Kombination muss aber nur ein System von 2 linearen Gleichungen gelöst werden. Man erhält so den Mittelpunkt. Einsetzen in eine der Ausgangsgleichungen liefert den Kreisradius.
b) Die drei Punkte haben jeweils zum Mittelpunkt den gleichen Abstand. Siehe dazu die nachfolgende Erklärung!
c) Der Kreismittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten auf zwei Seiten eines mit den Punkten aufgespannten Dreiecks. Einsetzen in eine Kreisgleichung für einen der Punkte liefert den Kreisradius.

Gegeben seien drei Punkte $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$. Gesucht sind $\mathbf{M}(m_1, m_2)$ und r.
Für die Punkte gelten auch die Ortsvektoren **a**, **b**, **c** und **m** (mit kartesischen Koordinaten).

♦ Lösungsweg a)

Mit Einsetzen des Punkts **A** ist die Kreisgleichung $(\mathbf{a} - \mathbf{m})^2 = r^2$, und analog für **b**, **c**.
In Koordinaten entstehen so 3 quadratische Gleichungen.
Eine direkte Lösung dieses Systems ist wenig sinnvoll!
Die Differenz zweier Gleichungen liefert eine lineare Gleichung! Beispiel für **a** und **b**:

$$a_1^2 - 2 a_1 m_1 + m_1^2 + a_2^2 - 2 a_2 m_2 + m_2^2 = r^2 \qquad (2.1)$$
$$b_1^2 - 2 b_1 m_1 + m_1^2 + b_2^2 - 2 b_2 m_2 + m_2^2 = r^2 \qquad (2.2)$$
Differenz: $$2 (b_1 - a_1) m_1 + 2 (b_2 - a_2) m_2 = b_1^2 - a_1^2 + b_2^2 - a_2^2 \qquad (2.3)$$

Eine analoge Gleichung für **a** und **c**.
(Die verbleibende Kombination **b** und **c** würde dann nicht mehr benötigt. Bei vorhandenen Zahlenangaben wählt man die zwei Kombinationen, die einfachste Zahlen ergeben, z.B. wenn Koordinaten 0 vorkommen.)
Zwei lineare Gleichungen für die Unbekannten m_1 und m_2. Einsetzen von m in eine der Gleichungen, z.B. (2.1) liefert r.

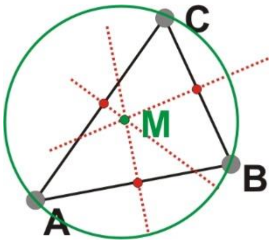
♦ Lösungsweg b)

Der Abstand zweier Punkte soll gleich r sein. $|\mathbf{a} - \mathbf{m}| = r$, und ebenso für **b** und **c**.
Mit Koordinaten direkt: $\{ (a_1 - m_1)^2 + (a_2 - m_2)^2 \}^{1/2} = r$
Die Lösung eines Systems dieser 3 Gleichungen mit Wurzelausdrücken ist nicht sinnvoll.
Wenn man quadriert hat man 3 Gleichungen, die identisch zum Lösungsweg a) sind.
Man kann noch schneller argumentieren. Die Kreisgleichung $(\mathbf{a} - \mathbf{m})^2 = r^2$ bedeutet nichts anderes als "Der Abstand von **a** zu **m** ist r". Also sind die beiden Forderungen bei den Lösungswegen identisch!

♦ Lösungsweg c)

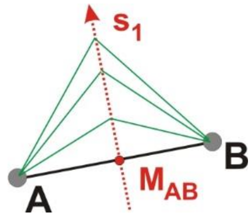
Das ist die rechnerische Umsetzung des grafischen Verfahrens zur Bestimmung des Mittelpunkts! Der Mittelpunkt des Umkreises **M** ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

(**M** muss nicht unbedingt im Innern des Dreiecks ABC liegen!)



Die Verbindungslinie zwischen **A** und **B** ist **b** - **a** (oder **a** - **b**). Für den Mittelpunkt darauf gilt $\mathbf{m_{AB}} = \mathbf{a} + (1/2)\,(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.
Die Senkrechte darauf sei $\mathbf{s_1}$ (Richtungsvektor).

Alle Punkte auf einer Geraden g_{AB}: $\mathbf{x} = \mathbf{m_{AB}} + \lambda\, \mathbf{s_1}$ (das ist die "Mittelsenkrechte") haben zu **A** und **B** gleichen Abstand.



Die Koordinatendarstellung von $\mathbf{s_1}$ ist ganz einfach anzugeben:
Vertauschung und 1 Vorzeichenwechsel der Koordinaten von **b** - **a**.

Das ist die allgemeine "Vorschrift": Zu einem Vektor $\mathbf{x} = \binom{x}{y}$ ist die Senkrechte dazu (Normale) $\mathbf{n_x} = \binom{-y}{x}$.

Eine zweite Mittelsenkrechte g_{AC}: $\mathbf{x} = \mathbf{m_{AC}} + \mu\, \mathbf{s_2}$ gelte für **A** und **C**. (Oder Analoges für **B** und **C**). Gleichsetzen der beiden Mittelsenkrechten liefert den Schnittpunkt **M**. In **M** liegt ein jeweils gleicher Abstand zu "**A** und **B**" und zu "**B** und **C**" vor, also insgesamt zu allen 3 Punkten. **M** ist daher der Mittelpunkt des Kreises durch die 3 Punkte **A**, **B**, **C**.

Rechnerisch erhält man 2 lineare Gleichungen für λ und μ. Einsetzen in die Mittelsenkrechte liefert **M** (eine Rechnung mit λ, Rechnung mit μ zur Kontrolle).
r ist $|\mathbf{m} - \mathbf{a}|$ (oder analog mit **b**, **c**).

Hier wird für den Umkreis die Kreisgleichung $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$ nicht mehr explizit verwendet. Sie ist indirekt in der geometrischen Bedingung gleichen Abstands zu den Eckpunkten enthalten.

♦ Beispiel:

$\mathbf{a} = \binom{5}{8}$; $\mathbf{b} = \binom{6}{1}$; $\mathbf{c} = \binom{7}{4}$

• Lösungsweg a, b)

(2.3): $2\,(b_1 - a_1)\,m_1 + 2\,(b_2 - a_2)\,m_2 = b_1^2 - a_1^2 + b_2^2 - a_2^2 \rightarrow 2\,m_1 - 14\,m_2 = -52$

dto. für **a**, **c**: $4\,m_1 - 8\,m_2 = -24$

$\rightarrow m_1 - 7\,m_2 = -26 \;\wedge\; m_1 - 2\,m_1 = -6 \rightarrow m_1 = 2;\ m_2 = 4 \rightarrow \mathbf{m} = \binom{2}{4}$

(2.1): $a_1^2 - 2\,a_1\,m_1 + m_1^2 + a_2^2 - 2\,a_2\,m_2 + m_2^2 = r^2$

$\rightarrow r^2 = 25 - 20 + 4 + 64 - 64 + 16 = 25 \rightarrow r = 5$

• Lösungsweg c)

a, **b**: $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \binom{1}{-7}$; $\mathbf{m_{AB}} = \mathbf{a} + (1/2)\,(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \binom{5 + 1/2}{8 - 7/2} = \binom{11/2}{9/2}$; $\mathbf{s_1} = \binom{7}{1}$

a, **c**: $\mathbf{c} - \mathbf{a} = \binom{2}{-4}$; $\mathbf{m_{AC}} = \mathbf{a} + (1/2)\,(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \binom{5 + 1}{8 - 2} = \binom{6}{6}$; $\mathbf{s_2} = \binom{4}{2} \rightarrow \binom{2}{1}$

(Möglichst einfache Zahlen für den Richtungsvektor $\mathbf{s_2}$!)

Gleichungssystem $g_{AB} = g_{AC}$: $\mathbf{m_{AB}} + \lambda\, \mathbf{s_1} = \mathbf{m_{AC}} + \mu\, \mathbf{s_2} \rightarrow \lambda\, \mathbf{s_1} - \mu\, \mathbf{s_2} = \mathbf{m_{AC}} - \mathbf{m_{AB}}$

$\mathbf{m_{AC}} - \mathbf{m_{AB}} = \begin{pmatrix} 6-11/2 \\ 6-9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

$7\lambda - 2\mu = (1/2) \ \wedge \ \lambda - \mu = (3/2) \rightarrow \lambda = -(1/2);\ \mu = -2$

$\mathbf{m} = \mathbf{m_{AB}} + \lambda\, \mathbf{s_1} = \begin{pmatrix} 11/2-7/2 \\ 9/2-1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix};\ \mathbf{m} = \mathbf{m_{AC}} + \mu\, \mathbf{s_2} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$r = |\mathbf{m} - \mathbf{a}| \rightarrow r^2 = (\mathbf{m} - \mathbf{a})^2 = \{ \begin{pmatrix} 2-5 \\ 4-8 \end{pmatrix} \}^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \rightarrow r = 5$

(Eventuelle) Kontrollen: $r^2 = (\mathbf{m} - \mathbf{b})^2 = \{ \begin{pmatrix} 2-6 \\ 4-1 \end{pmatrix} \}^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \rightarrow r = 5$

$r^2 = (\mathbf{m} - \mathbf{c})^2 = \{ \begin{pmatrix} 2-7 \\ 4-4 \end{pmatrix} \}^2 = 5^2 + 0^2 = 25 \rightarrow r = 5$

Der Lösungsweg c) erfordert mehr Nachdenken als die "brute force" Wege a, b).
Der Rechenaufwand ist aber <u>nicht</u> geringer!

3. Lage Punkt / Kreis

Der Abstand des Punkts **P** zum Mittelpunkt **M** wird mit r verglichen.

Eine Gleichung (1.3) bzw. (1.4) ist in (1.1) umzuformen, weil **m** und r benötigt werden.
Man spart sich die Berechnung der Wurzel bei Verwendung der Abstandsquadrate:
Der quadrierte Abstand wird mit r^2 verglichen.

Beispiel: Kreis mit $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und r = 3

a) P(0|4) $\rightarrow \mathbf{m} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $|\mathbf{m} - \mathbf{p}|^2 = 4 + 1 = 5 < 9 \Rightarrow$ innerhalb Kreis

b) P(1|5) $\rightarrow \mathbf{m} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. $|\mathbf{m} - \mathbf{p}|^2 = 9 \Rightarrow$ auf dem Kreis

c) P(2|6) $\rightarrow \mathbf{m} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} -2-2 \\ 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$. $|\mathbf{m} - \mathbf{p}|^2 = 16 + 1 = 17 > 9 \Rightarrow$ außerhalb Kreis

Übungsaufgaben zu "Kreis durch 3 Punkte"

➔ Wenn 3 Punkte ohne weitere Angaben gegeben sind, ist nur das direkte Einsetzen in die Kreisgleichungen möglich. Eventuell kann überprüft werden, dass die Punkte nicht auf einer Geraden liegen - aber dann wäre die Aufgabenstellung irreführend.
Wenn einschränkende Zusatzangaben vorliegen, sollten diese vor Aufstellung des Gleichungssystems eingesetzt werden!

1)

Ein Kreis berührt die y-Achse {Punkt **A**} und geht durch die Punkte **B**(3|7) und **C**(6|4).

Zusatzannahme: Der Berührpunkt und der Kreismittelpunkt liegen auf einer Parallelen zur x-Achse.

Gesucht: Kreisgleichung (Mittelpunkt und Radius)

2)

Ein Kreis berührt die y-Achse {Punkt **A**} und die x-Achse {Punkt **B**} und geht durch den Punkt **C**(2|4).

Zusatzannahme: Der Berührpunkt **A** und der Kreismittelpunkt liegen auf einer Parallelen zur x-Achse. Der Berührpunkt **B** und der Kreismittelpunkt liegen auf einer Parallelen zur y-Achse.

Gesucht: Kreisgleichung

1)

Sofort kann angegeben werden: **A**(0|y) - mit der noch nicht bekannten Koordinate y.
{Damit liegt **A** sicher auf der y-Achse.}

Der Kreismittelpunkt sei allgemein **M**(m_1|m_2)

Umständlich ist das direkte Einsetzen dieser Koordinaten in $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = r^2$.
(Verfahren: Kreis durch 3 Punkte)

Für **A**: $\begin{pmatrix} 0 - m_1 \\ y - m_2 \end{pmatrix}^2 = m_1^2 + m_2^2 + y^2 - 2\,y\,m_2 = r^2$

Für **B**: $\begin{pmatrix} 3 - m_1 \\ 7 - m_2 \end{pmatrix}^2 = m_1^2 + m_2^2 - 6\,m_1 - 14\,m_2 + 58 = r^2$

Für **C**: $\begin{pmatrix} 6 - m_1 \\ 4 - m_2 \end{pmatrix}^2 = m_1^2 + m_2^2 - 12\,m_1 - 8\,m_2 + 52 = r^2$

Die Differenz der Gleichungen für **B** und **C** ($6\,m_1 - 6\,m_2 + 6 = 0$) liefert $m_1 = m_2 - 1$.

Setzt man das in die Differenz der Gleichungen für **A** und **B** ein, erhält man

$m_2 = \{y^2 - 64\} / \{2\,y - 20\}$

$m_1 = \{y^2 - 2\,y - 44\} / \{2\,y - 20\}$

$r^2 = \{y^4 - 22\,y^3 + 222\,y^2 - 1192\,y + 3016\} / \{2\,(y - 10)^2\}$

In 2 Fällen für y ist die y-Koordinate von **A** (y) und **M** (m_2) gleich (und damit **A** und **M** auf einer Parallelen zur x-Achse): y = 4; 16.

Für <u>andere y</u> muss die Rechnung richtig interpretiert werden! Der Kreis geht richtig durch die 3 gegebenen Punkte. Aber (!) der <u>Kreis schneidet</u> dann auch die <u>y-Achse</u> im Punkt **A**.

Wesentlich kürzer ist das direkte Einsetzen der Zusatzannahme "parallel".

Dann ist, wie vorher, **A**(0|y).

Die y-Koordinate von **M** ist auch y, und weil $|\overrightarrow{\mathbf{AM}}| = r$ ist die x-Koordinate r: **M**(r|y)!

Damit: **A**: $\begin{pmatrix} 0 - r \\ y - y \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = r^2$

B: $\begin{pmatrix} 3 - r \\ 7 - y \end{pmatrix}^2 \Rightarrow y^2 - 14\,y - 6\,r + 58 = 0$

C: $\begin{pmatrix} 6 - r \\ 4 - y \end{pmatrix}^2 \Rightarrow y^2 - 8\,y - 12\,r + 52 = 0$

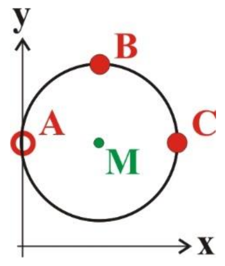
"B - C": $-6\,y + 6\,r + 6 = 0 \quad \rightarrow r = y - 1$

Eingesetzt in "B": $y^2 - 20\,y + 64 = 0 \quad \rightarrow y = 10 \pm 6$.

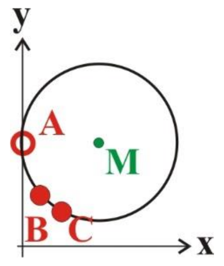
y = 4 → r = 3 → **A**(0|4); **M**(3|4).

y = 16 → r = 15 → **A**(0|16); **M**(15|16).

Lösungen zu
y = 4 /r = 3
y = 16 / r = 15
Gleichbleibend
B(3|7)
C(6|4)



A(0|4); **M**(3|4)



A(0|16); **M**(15|16)

Beachten: In den beiden Skizzen ist die Skalierung der Achsen verschieden!

2)

Wie bei Übung 1 kann sofort angegeben werden: **A**(0|y) - mit der noch nicht bekannten Koordinate y. Für den Kreismittelpunkt sei **M**(m_1|m_2)

Zusätzlich muss der Punkt **B** auf dem Kreis <u>und</u> auf der x-Achse sein: **B**(x|0)

Für **A**: $\begin{pmatrix}0-m_1\\y-m_2\end{pmatrix}^2 = m_1^2 + m_2^2 + y^2 - 2\,y\,m_2 = r^2$

Für **B**: $\begin{pmatrix}x-m_1\\0-m_2\end{pmatrix}^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2\,m_1\,x + x^2 = r^2$

Für **C**: $\begin{pmatrix}2-m_1\\4-m_2\end{pmatrix}^2 = m_1^2 + m_2^2 - 4\,m_1 - 8\,m_2 + 20 = r^2$

Prinzipiell könnte, wie bei Übung 1, eine allgemeine Lösung für x und y gesucht werden. Dann erhält man aber auch wieder die Fälle, in denen die Achsen geschnitten werden!

Umständlich erhält man zuerst z.B.

$m_1 = \{x^2\,y - 4\,x^2 + 4\,y^2 - 20\,y\} / \{2\,x\,y - 8\,x - 4\,y\}$

Etwas kürzer nach Einsetzen der Symmetrie x = y

$m_1 = m_2 = \{y^2 - 20\} / \{2y - 12\}$

(dann gleiche x- und y-Koordinate für **M** als Rechenresultat!)

$r^2 = \{y^4 - 12\,y^3 + 72\,y^2 - 240\,y + 400\} / \{2\,(y - 6)^2\}$

Wegen "Berührungspunkte": x = y = r.

Daraus folgen r = 2, r = 10, $r = 2\sqrt{5}$

(und auch $r = -2\sqrt{5}$, das erlaubte Koordinaten x und y liefert und wegen r^2 auch die Kreisgleichungen erfüllt).

r = 2 und r = 10 erfüllen die Zusatzbedingung, die beiden anderen Werte führen zu Schnittpunkten **A** und **B**.

<u>*Wesentlich kürzer*</u> ist wieder das sofortige Einsetzen der Zusatzbedingung:

Berührungspunkte liegen nur dann vor, wenn y = r. → **A**(0|r), **B**(r|0).

Der Kreismittelpunkt liegt dann wegen der Parallelitäten bei **M**(r|r);

A: $\begin{pmatrix}0-r\\r-r\end{pmatrix}^2 \Rightarrow r^2 = r^2$

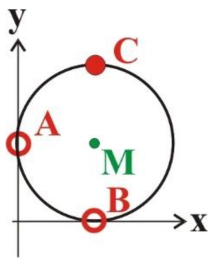
B: $\begin{pmatrix}r-r\\0-r\end{pmatrix}^2 \Rightarrow r^2 = r^2$

C: $\begin{pmatrix}2-r\\4-r\end{pmatrix}^2 \Rightarrow r^2 - 12\,r + 20 = 0 \rightarrow r = 6 \pm 4$

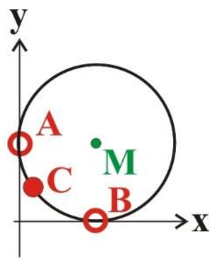
r = 2: **A**(0|2); **B**(2|0); **M**(2|2)

r = 10: **A**(0|10); **B**(10|0); **M**(10|10)

Lösungen zu
y = r = 2
y = r = 10
Gleichbleibend
C(2|4)



A(0|2); **B**(2|0); **M**(2|2)



A(0|10); **B**(10|0); **M**(10|10)

Beachten: In den beiden Skizzen ist die Skalierung der Achsen verschieden!