Übungen 3

Vektoren

1) Gesucht sind alle möglichen Vektoren **c** mit der Länge $\sqrt{6}$, die senkrecht auf den Vektoren **a** und **b** stehen.
   $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$

2a) Ein Dreieck in R^2 ist durch die Punkte O(0|0), A(3|4), B(5|12) definiert. Zwei Seiten sind als $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ definiert. Berechne F mit der Formel aus der Elementargeometrie "Grundlinie · halbe Höhe".

2b) Eine Dreiecksfläche ist die Hälfte der Fläche eines Parallelogramms mit den Seiten **a** und **b**. Man kann das auch für eine Rechnung "für in R^2 gegebene Vektoren" benutzen. Wie? (Hinweis: Die eigentliche Rechnung wird nicht in R^2 durchgeführt!)

2c) Überlegungen, wie in 2a), führen zu einer allgemein gültigen Formel
   $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$
   Zeige das allgemein und durch eine Rechnung mit Koordinaten.
   Punkte O(0|0), $A(a_x|a_y)$, $B(b_x|b_y)$ und $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$; $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$.

2d) Eine allgemeine Rechnung in R^3 ist zu umständlich. Zeige daher an einem Zahlenbeispiel, dass die linke und rechte Seite von 2c) gleiche Werte liefern.
   Q(1|2|3), A(2|0|5), B(3|1|1), $\mathbf{a} = \overrightarrow{QA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{QB}$

Ebene

3) Ebene E: x + 2 y + 3 z = 5. Welche der Punkte P(4|3|2), Q(4|3|0), R(4|3|-2) liegen auf der gleichen Seite wie der Nullpunkt relativ zu E? (0 bis 3 möglich) Welcher Punkt hat den größten Abstand? (und welchen)

4) Gegeben P(1|3|5), Q(7|5|1). Gesucht sind alle Punkte, die von P und Q den gleichen Abstand haben.

5) E_1: x + 3 y + 5 z = 7; E_2: -6 x - 5 y - 4 z = -3. Gesucht: Schnittgerade und deren Abstand vom Nullpunkt.

6) Eine Gerade g geht durch P(-8|0|15) und Q(10|9|-6). Die Gerade schneidet die Ebenen E_1 und E_2 - Durchstoßpunkte D1 und D2. Welche Länge hat $\overrightarrow{D_1D_2}$?
   E_1: $\mathbf{x}\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix} = 7$, E_2: geht durch A(8|3|-2), B(2|-2,1), C(3,-2,0)

7) Ebenen der vorigen Aufgabe (Nr. 6). E_1: $\mathbf{x}\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix} = 7$, E_2: geht durch A(8|3|-2), B(2|-2,1), C(3,-2,0)
   Geben Sie die Gleichungen für die Parallelen zur Schnittgerade von E_1 und E_2 an, die in E_1 liegen und jeweils einen Abstand $\sqrt{52/15}$ von der Schnittgeraden haben.

1) a) Senkrecht über das Skalarprodukt ausgedrückt.

$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\mathbf{a \cdot c}$ = x + 3y + 5z = 0; $\mathbf{b \cdot c}$ = 4x - 2y + 6z = 0

2 Gleichungen, 3 Unbekannte ⇒ 1 freier Parameter (z gewählt)

x = -3y - 5z → -12 y - 20 z - 2y + 6 z = 0 → -14 y - 14 z = 0 →y = - z → x = - 2 z

$|\mathbf{c}|^2 = 4\,z^2 + z^2 + z^2 = 6 \rightarrow z = \pm 1$

$\mathbf{c} = \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) **c** senkrecht auf **a** und **b** über das Kreuzprodukt ausgedrückt:

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 28\,\mathbf{i} + 14\,\mathbf{j} - 14\,\mathbf{k}$

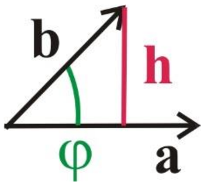
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 28 \\ 14 \\ -14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 6 \rightarrow \mathbf{c} = \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Bei "Unsicherheit" wegen des "±":

$\mathbf{a \cdot c} = +2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = -2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 0$

2a) Berechnung der Höhe h

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ und damit die Längen a = |**a**| = 5, b = |**b**| = 13.



$h = b \sin(\varphi) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)}$

$a \cdot b = a \cdot b \cdot \cos(\varphi) \rightarrow 15 + 48 = 63 = 5 \cdot 13 \cos(\varphi)$

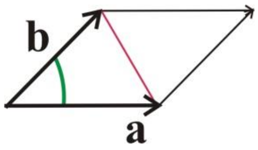
$\cos(\varphi) = 63/65$ ($\varphi \approx 14{,}3°$)

$h = 13 \sqrt{(4225 - 3969} /65 = 13 \cdot 16 / 65 = 208/65$

Damit F = a h / 2 = (5 · 208) / (65 ·2) = 8 (FE) ("Flächeneinheiten)

2b) Man kann die Vektoren durch eine 3. Komponente z = 0 erweitern. Dann lässt sich alles in R^3 anstatt in R^2 berechnen - "wenn das einen Vorteil bietet!"

Ein Dreieck hat die halbe Fläche des Parallelogramms mit den Seiten a und b.
Mit Vektoren **a** und **b** geschrieben, ist die Fläche gleich dem Betrag des Vektorprodukts |**a** x **b**|!



$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 12 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = \mathbf{k}\,16 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$

(wie zu erwarten: **a** x **b** zeigt in die z-Richtung, weil **a** und **b** in der x-y-Ebene liegen)

|**a** x **b**| = 16 → Dreiecksfläche F = 8 (FE)

2c) Benutzt wird das Auftreten von φ in zwei Formeln, Skalarprodukt und Kreuzprodukt. Weil in der Endformel Beträge und Quadrate benutzt werden, spielen die Orientierung des Vektors relativ zur Ebene (Kreuzprodukt) und das Vorzeichen des Skalarprodukts keine Rolle. Es gilt $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin(\varphi)$ und $\mathbf{a \cdot b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\varphi)$.

$\sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi) = 1 - (\mathbf{a \cdot b})^2 / \{|\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}|^2\}$ und damit

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}|^2 \sin^2(\varphi) = |\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}|^2\,[1 - (\mathbf{a \cdot b})^2 / \{|\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}|^2\}] = |\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a \cdot b})^2$

Für die Rechnung in Komponenten wird (nur) für das Kreuzprodukt auf R^3 erweitert:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_y & 0 \\ b_y & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_x & 0 \\ b_x & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$= \mathbf{k}\,(a_x\, b_y - a_y\, b_x)$ und damit $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = (a_x\, b_y - a_y\, b_x)^2$

$|\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2$; $|\mathbf{b}|^2 = b_x^2 + b_y^2$; $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = (a_x\, b_x + a_y\, b_y)^2 = a_x^2\, b_x^2 + a_y^2\, b_y^2 + 2\, a_x\, b_x\, a_y\, b_y$

$|\mathbf{a}|^2\, |\mathbf{b}|^2 = a_x^2\, b_x^2 + a_y^2\, b_y^2 + a_x^2\, b_y^2 + a_y^2\, b_x^2$

und $|\mathbf{a}|^2\, |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = (a_x\, b_y - a_y\, b_x)^2$

2d) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 6\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \to |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{36+36+9} = 9$; $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = 81$

$|\mathbf{a}| = \sqrt{1+4+4} = 3$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{4+1+4} = 3$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2 + 2 - 4 = 0$

$|\mathbf{a}|^2\, |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \to 9 \cdot 9 - 0 = 81$

3) Der Abstand eines Punkts P zur Ebene E ist $d = (\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{n_o} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n_o}$.

Der Abstand des Nullpunkts $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ zur Ebene ist $d = -\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{n_o}$.

Aus der Koordinatengleichung: $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $|\mathbf{n}| = \sqrt{14}$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 5 \to d(\text{Nullp.}) < 0$

$\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 16$; $\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 10$; $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$

Vorzeichen von $\mathbf{p}\cdot\mathbf{n_o} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n_o}$ gleich dem Vorzeichen von $\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$

$\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$: P: 16 - 5 positiv, Q: 10 - 5 positiv, R 10 - 4 negativ.

R liegt auf der gleichen Seite wie der Nullpunkt relativ zu E.

Größter Abstand für P. $|d| = |\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{n_o} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n_o}| = 11 / \sqrt{14}$

4) a) "Triviale Lösung". R(x|y|z) und $|\overrightarrow{RP}| = |\overrightarrow{RQ}|$.

(Rechnung mit dem Abstandsquadrat)

$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = (x-7)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 10z + 25 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 2z + 1$

$12x + 4y - 8z = 40 \to 3\,x + y - 2\,z = 10$ (Ebene in R^3).

b) "Elegante Lösung". Gleichen Abstand haben alle Punkte, die auf einer Ebene zwischen den beiden Punkten liegen. Dann geht die Ebene durch den Mittelpunkt M zwischen beiden Punkten. Die Ebene hat eine Normale **n** in Richtung des Verbindungsvektors zwischen beiden Punkten.

Mittelpunkt zwischen P(1|3|5), Q(7|5|1): M(4|4|3). $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

E: $\left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$; E: $\mathbf{x}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 10$; E: $3\,x + y - 2\,z = 10$

5) Schnittgerade: E_1 und E_2 sind erfüllt. Das liefert 2 Gleichungen für 3 Unbekannte (x,y,z). Die Lösung enthält 1 freien Parameter. Sei z = t.

[1] $x + 3y + 5t = 7$

[2] $-6x - 5y - 4t = -3$

[1]: $x = 7 - 3y - 5t \rightarrow$ [2]: $-42 + 18y + 30t - 5y - 4t = -3 \rightarrow 13y = -26t + 39 \rightarrow$

$\rightarrow y = -2t + 3 \rightarrow$ [1]: $x = 7 + 6t - 9 - 5t = t - 2$

geordnet $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Schnittgerade)

Abstand Punkt - Gerade (R^3)

{Hesse-Normalenform nicht benutzbar, weil **n** nicht definierbar.}

a) Berechnung über *Kreuzprodukt*

$d = |(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u_o}|$; Abstand vom Nullpunkt: $\mathbf{p} = \mathbf{0}$.

$\mathbf{a} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{u}| = \sqrt{14}$; $|\mathbf{u}| = \sqrt{6}$; $d = |\mathbf{a} \times \mathbf{u_o}| = \sqrt{7/3}$

b) Berechnung über *Lotfußpunktverfahren*

Hilfsebene mit Aufpunkt = Nullpunkt und Normale = Richtungsvektor der Geraden, u:

E_H: $(\mathbf{x} - \mathbf{0})\cdot\mathbf{u} = 0$

Einsetzen der Geraden (zur Bestimmung von **f**): $(\mathbf{a} + t\,\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} = 0 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u} + t\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -8$; $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$; $t = -(-8)/6 = 4/3$

Lotfußpunkt: $\mathbf{f} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 4/3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

Abstand Nullpunkt - Fußpunkt $\mathbf{d} = \mathbf{f} - \mathbf{0} = \mathbf{f}$: $|\mathbf{d}| = \sqrt{4 + 1 + 16} / 3 = \sqrt{21} / 3 = \sqrt{7/3}$

6) g: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 10 + 8 \\ 9 \\ -6 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ -21 \end{pmatrix}$

E_1: $\mathbf{x}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 7$ Die Normalenform ist gut geeignet für die Berechnung des Schnittpunkts.

E_2: Zuerst die Parameterform zu A(8|3|-2), B(2|-2,1), C(3,-2,0)

Als Aufpunkt C, Richtungsvektoren **u**, **v** "geeignete" Paare.

E_2: $\mathbf{x} = \mathbf{c} + s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v} = \mathbf{c} + s \begin{pmatrix} 8 - 2 \\ 3 + 2 \\ -2 - 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 - 3 \\ 3 + 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Normale $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5\,i - 3j + 5\,k = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\mathbf{c}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 15 + 6 = 21$

$\rightarrow E_2$: $\mathbf{x}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 21$

r für Schnittpunkte:

Aufpunkt sei **e**, dann $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = 7$ für E_1, $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = 21$ für E_2

Jeweils g in E eingesetzt. $(\mathbf{a} + r\,\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{e}\cdot\mathbf{n} \rightarrow r = (\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,) / \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$

E_1: $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = 7$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}-8\\0\\15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix} = -77$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}18\\9\\-21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix} = 126 \rightarrow r = (7 + 77) / 126 = 2/3$

E_2: $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = 21$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}-8\\0\\15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\5\end{pmatrix} = 35$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix}18\\9\\-21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\5\end{pmatrix} = -42 \rightarrow r = (21 - 35) / (-42) = 1/3$

Einsetzen von r für Schnittpunkte:

E_1: $\mathbf{d_1} = \begin{pmatrix}-8\\0\\15\end{pmatrix} + 2/3\begin{pmatrix}18\\9\\-21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix}$; E_2: $\mathbf{d_2} = \begin{pmatrix}-8\\0\\15\end{pmatrix} + 1/3\begin{pmatrix}18\\9\\-21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\8\end{pmatrix}$

Damit $\overrightarrow{D_1D_2} = \mathbf{d_2} - \mathbf{d_1} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\7\end{pmatrix}$; $|\mathbf{d_1} - \mathbf{d_2}| = \sqrt{36+9+49} = \sqrt{94}$

7) Ebenen:

E_1: $\mathbf{x}\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix} = 7$, E_2: $\mathbf{x}\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\5\end{pmatrix} = 21$

Schnittgerade g_S- gleiches **x** in beiden Ebenen: Gleichungssystem, 1 freier Parameter

[1] $4x - y - 3t = 7$ | t als freier Parameter für z

[2] $5x - 3y + 5t = 21$

[2'] $-7x + 14t = 0$ | = [2] - 3 · [1]

[2']: $x = 2t \rightarrow y = -7 + 5t \rightarrow g_S$: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u} = \begin{pmatrix}0\\-7\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$;

Die Parallelen g_P zu g_S haben einen zu **u** kollinearen Richtungsvektor, **u** selbst kann dafür eingesetzt werden. Die Aufpunkte von g_P müssen in der Ebenen E_1 liegen.

Trivial ist, dass es nicht <u>einen</u> bestimmten Aufpunkt für das jeweilige g_P gibt.

Es liegt das Abstandsproblem "Punkt - Gerade (R^3)" vor. (Die Hesse-Normalenform ist daher nicht anwendbar.)

Der Abstand eines Punkts P von der Geraden g_S ist: $d = |(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u_o}|$

P liegt in E_1. Gegeben ist deren Normalenform. Für die nachfolgende Rechnung ist die Parameterform geeignet. Das allgemeine Rezept für die Umformung ist (siehe G05):

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix}n_x\\n_y\\n_z\end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix}-n_y\\n_x\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}0\\-n_z\\n_y\end{pmatrix}$ - für E_1 $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}$

Als Aufpunkt kann irgendein Punkt auf E_1 benutzt werden, wir verwenden **a** (von g_S).

Damit E_1 : $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{v} + s\,\mathbf{w} = \begin{pmatrix}0\\-7\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$

Dies wird in die Gleichung für den Abstand eingesetzt. (*Kreuzprodukt*)

d = |(**a** + r **v** + s **w** - **a**) x $\mathbf{u_o}$| = |(r **v** + s **w**) x **u**| / |**u**|

r **v** + s **w** = $\begin{pmatrix} r \\ 4r+3s \\ -s \end{pmatrix}$; $|\mathbf{u}|^2 = 30$

$$(r\,\mathbf{v}+s\,\mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r & 4r+3s & -s \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 4r+3s & -s \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} r & -s \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} r & 4r+3s \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \{ (4r+3s) + 5s \}\,\mathbf{i} - \{ r + 2s \}\,\mathbf{j} + \{ 5r - 2\,(4r+3s)\}\,\mathbf{k}$$

$$= \begin{pmatrix} 4r+8s \\ -r-2s \\ -3r-6s \end{pmatrix}$$

Die Gleichung für d lösen wir "passend" auf.

$4^2\,(r+2s)^2 + (r+2s)^2 + 3^2\,(r+2s) = 26\,(r+2s)^2 = |\mathbf{u}|^2\, d^2 = 30 \cdot 52/15$

$(r+2s)^2 = 4 \rightarrow r + 2s = \pm 2 \rightarrow r = \begin{cases} 2-2s \\ -2-2s \end{cases}$

Wir haben zur Bestimmung des Punkts P auf der Parallelen g_P

- 2 Parameter r und s.
  Es gibt unendliche viele Punkte, die alle auf der Parallelen g_P liegen!
  Um 1 Lösung mit Zahlen anzugeben, wählen wir ein beliebiges s.
  Sei s = 1. $\rightarrow r_1 = 0$, $r_2 = -4$
- 2 Möglichkeiten zu 1 s
  Das liefert 2 Parallelen auf den entgegengesetzten Seiten der Schnittgerade g_S

1. Parallele g_{P1}: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow g_{P1}: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Parallele g_{P2}: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + (-4) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow g_{P2}: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alternativ zum Kreuzprodukt kann das *Lotfußpunktverfahren* benutzt werden.
Hilfsebene mit dem Richtungsvektor **u** der Schnittgeraden als Normale. P wird wieder in allgemeiner Form - mit den Parametern r und s - als Punkt in der Ebene E_1 angesetzt.

Aufpunkt der Ebene E_1 ist **a** (von g_S), weil auch die Schnittgerade in E_1 liegt. Der Lotfußpunkt **f** liegt auf der Schnittgeraden, g_S in E_1 eingesetzt:

"(**x**-**a**)·**n** = 0" $\rightarrow E_H$: [(**a** + t **u**) - (**a** + r **v** + s **w**)]·**u** = 0

$\rightarrow$ t **u**·**u** - r **v**·**u** - s **w**·**u** = 0

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 30$; $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 22$; $\mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 14 \rightarrow t = 11/15\, r + 7/15\, s$

F liegt irgendwo auf der Schnittgeraden g_S als "passender" Lotfußpunkt zum jeweiligen P in E_1. Um einen davon auszuwählen, wird ein freier Parameter gesetzt. Sei s = 1. Dann hängen 1 "passender" Lotfußpunkt und der Punkt in der Ebene über den Parameter r voneinander ab.

$\rightarrow$ t = 11/15 r + 7/15.

$\rightarrow$ $\mathbf{f} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + (11/15\ r + 7/15) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 22/15 \\ 55/15 \\ 11/15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14/15 \\ 35/15 \\ 7/15 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FP} = \mathbf{p} - \mathbf{f} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{v} + s\,\mathbf{w} - \mathbf{a} - t\,\mathbf{u}$

$r\,\mathbf{v} + s\,\mathbf{w} - t\,\mathbf{u} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 22/15 \\ 55/15 \\ 11/15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14/15 \\ 35/15 \\ 7/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14/15 \\ 10/15 \\ -22/15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -7/15 \\ 5/15 \\ -11/15 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{FP}\right|^2 = \{ (14 + 7r)^2 + (10 + 5r)^2 + (22 + 11r)^2 \} / 15^2$

$= \{ 7^2 (2+r)^2 + 5^2 (2+r)^2 + 11^2 (2+r)^2 \} / 15^2 = 195\,(2+r)^2 / 15^2 = 52/15$

$(2+r)^2 = 52 \cdot 15^2 / (15 \cdot 195) = 4 \rightarrow 2 + r = \pm 2 \rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = -4$

Einsetzen von $r_{1,2}$ und s = 1 in E_1 liefert die Aufpunkte, und mit dem Richtungsvektor **u** die zu g_s parallelen Geraden g_P mit dem gegebenen Abstand.

1. Parallele g_{P1}: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow g_{P1}: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Parallele g_{P2}: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow g_{P2}: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$