Übungen 1

Gerade

1) Eine Gerade geht durch die Punkte $P_1(1|2|3)$ und $P_2(4|5|6)$. Gesucht:
   a) Parameterform g: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u}$
   b) y- und z- Koordinate von $Q(7|y|z)$

2) g_1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$. Gesucht:
   a) g_2 = Parallele zu g_1, mit <u>anderen</u> Zahlen im Richtungsvektor
   b) g_3 = Identische Gerade zu g_1, mit <u>anderen</u> Zahlen im Aufpunkt und Richtungsvektor

3) Liegen die Punkte auf der Geraden g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$?
   a) $P_1(8|-7|1)$; b) $P_2(-6|14|0)$

4) Sind g_1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\5\\-6\end{pmatrix}$ und g_2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}11\\-12\\13\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}8\\-10\\12\end{pmatrix}$ parallel, identisch oder keines von beidem?

5) g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$; $P(4|-8)$. Abstand P von g?
   (Berechnung mit der Hesse-Normalenform)
   (Die Lösung enthält zum Vergleich auch das Lot-Fußpunkt-Verfahren.)

6) g: $\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}\cdot\mathbf{x} = 1$. Gesucht: Geradengleichung in der Parameterform

7) g_1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$; g_2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-4\\-9\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-12\\-9\end{pmatrix}$. Gesucht: Abstand beider Geraden

8) Gegeben: $P_1(1|2)$ und $P_2(5|10)$. Durch P_1 und P_2 geht eine Gerade g. Auf einer Geraden durch den Mittelpunkt zwischen P_1 und P_2 mit der Richtung der Normalen auf g liegen zwei Punkte Q_1 und Q_2. Der Abstand zwischen diesen beiden Punkten ist $2\sqrt{5}$. Gesucht sind die Koordinaten der beiden Punkte.
   Hinweis: Die Rechnung wird zeigen, dass Q_1 und Q_2 auf entgegengesetzten Seiten mit gleichem Abstand relativ zur Geraden liegen!

9) Eine Gerade g geht durch $A(1|2|3)$ und $B(-2|-3|-4)$. Gesucht sind alle Punkte, die auf der Geraden liegen und von A doppelt so weit entfernt wie von B sind.

1) Richtungsvektor $\mathbf{u} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1} = \begin{pmatrix} 4-1=3 \\ 5-2=3 \\ 6-3=3 \end{pmatrix}$; einer der beiden Punkte als Aufpunkt

   g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Ein Punkt liegt auf der Geraden, wenn er durch irgendein t erreichbar ist.

   x-Koordinate: $1 + 3t = 7 \rightarrow t = 2$; damit $q = \begin{pmatrix} 7 \\ 2+6 \\ 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

2) Für g_2 kollinearen Vektor wählen, z.B. $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dies kann für g_2 und g_3 verwendet werden.

   Als Aufpunkt für g_2 irgendein Punkt, der <u>nicht</u> auf g_1 liegt. Zuerst (für g_3) ein weiterer Punkt auf g_1: z.B. $t = 1 \rightarrow$ A(3|5|3). Dann liegt A'(3|5|7) mit <u>einer</u> geänderten Koordinate sicher nicht auf g_1.

   g_2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$; g_3: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

3) Damit ein Punkt auf der Geraden liegt, müssen <u>alle</u> Koordinaten durch <u>ein</u> t erhalten werden können.

   a) x-Koordinate $2 + 2t = 8 \rightarrow t = 3$; damit auch $2 - 9 = 7$ und $4 - 3 = 1 \Rightarrow$ ja

   b) x-Koordinate $2 + 2t = -6 \rightarrow t = -4$; damit $2 + 12 = 14$ aber $4 + 4 = 8 \Rightarrow$ nein

4) "Mit einem Blick" (Faktor -2): kollineare Richtungsvektoren - also parallel oder identisch. Identisch, falls ein Punkt von g_1 auch durch irgendein t in g_2 erreichbar ist (oder umgekehrt). Z.B. Probe für Aufpunkt von g_1 A(3|-2|1)

   $11 + 8t = 3 \rightarrow t = -1$ / $-12 - 10t = -2 \rightarrow t = -1$ / $13 + 12t = 1 \rightarrow t = -1$

   <u>Ein</u> t für alle Koordinaten: g_1 und g_2 sind identisch.

   <u>*Alternative Lösungsmöglichkeit*</u>: "Suche nach einem Schnittpunkt" anwenden

   Gilt $a_1 + s\,u_1 = a_2 + t\,u_2$ für <u>alle</u> 3 Komponenten?

   [1] $3 - 4s = 11 + 8t$ $\quad 4s + 8t = -8 \quad s + 2t = -2$

   [2] $-2 + 5s = -12 - 10t$ $\quad 5s + 10t = -10 \quad s + 2t = -2$

   [3] $1 - 6s = 13 + 12t$ $\quad 6s + 12t = -12 \quad s + 2t = -2$

   Die Lösung $s = -2 - 2t$ gilt für alle 3 Koordinaten (also kein Widerspruch vorhanden).

   Mit 1 freiem Parameter gibt es "unendlich viele Schnittpunkte" $\Rightarrow$ identische Geraden

5) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow |\mathbf{n}| = \sqrt{9+16} = 5$

   $d = (\mathbf{p} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n_0} = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \{1 \cdot 3 + (-13) \cdot (-4)\} / 5 = 11$

   (Bei einem negativen Wert von d hätte man den Betrag als Abstand angegeben.)

Alternative Lösung - zum Vergleich

u und **n** wie vorher. Die Lotgerade enthält als möglichen Aufpunkt P.

g_L: $\mathbf{x} = \binom{4}{-8} + r\binom{3}{-4}$; Der Schnittpunkt von g_L und g ist der Lotfußpunkt F.

Lineares Gleichungssystem für t und r:

[1] 3 - 4 t = 4 + 3 r	4 t + 3 r = -1	12 t + 9 r = -3
[2] 5 - 3 t = -8 - 4 r	-3 t + 4 r = -13	-12 t + 16 r = -52

[1] +[2]: 25 r = - 55 → r = - 11/5

in [1]: 4 t = -1 + 33/5 → t = 7/5

r in g_L: $\begin{pmatrix} 4 - {}^{33}/_5 = {}^{-13}/_5 \\ -8 + {}^{44}/_5 = {}^{4}/_5 \end{pmatrix}$; t in g: $\begin{pmatrix} 3 - {}^{28}/_5 = {}^{-13}/_5 \\ 5 - {}^{21}/_5 = 4/5 \end{pmatrix}$ (zweimal das gleiche **f** erhalten)

Abstand $\overrightarrow{\mathbf{FP}}$: $\begin{pmatrix} 4 + {}^{13}/_5 = 33/5 \\ -8 - {}^{4}/_5 = -{}^{44}/_5 \end{pmatrix}$; d $=\sqrt{33^2 + 44^2}$ / 5 = 11

(Einen Teil der Rechnung hätte man sich sparen können. Weil **f** = **p** + r **u**(g_L) ist **f** - **p** = r **u**(g_L)! Die doppelte Rechnung war nur sinnvoll, wenn **f** durch **a** + t **u**(g) kontrolliert werden soll!)

6) **n** ist ablesbar, **u** daraus, **u** = $\binom{3}{-4}$ (oder irgendein anderer dazu kollinearer Vektor)

Die Information zum Aufpunkt ist in der rechten Seite der Normalenform enthalten.

Rechte Seite **n·a**: $\binom{-4}{-3}\cdot\binom{x}{y}$ = 1 → 3 y = -4 x -1→ sei x = 2 → y = -3

g: $\mathbf{x} = \binom{2}{-3} + t\binom{3}{-4}$

7) Die Geraden sind parallel (kollineare Richtungsvektoren). Eine Prüfung auf "identisch" ist nicht unbedingt nötig. Die Abstandsformel liefert dann auch 0!

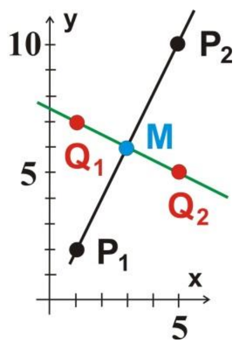
u = $\binom{4}{3}$ → **n** = $\binom{-3}{4}$ → |**n**| = 5

d = (**p** - **a**)·$\mathbf{n_o}$ → als Aufpunkt **a** $\binom{1}{1}$ von g_1 → als Punkt **p** $\binom{-4}{-9}$ von g_2

d = $\binom{-5}{-10}\cdot\binom{-3}{4}\cdot\frac{1}{5}$ = {15 - 40} / 5 = -5. Als Abstand wird der Betrag verwendet: 5

8) g durch Punkte → Normale auf Mittelpunkt →Abstand mit Parameter t → t durch Vergleich mit dem Aufgabentext → Einsetzen von t liefert die gesuchten 2 Punkte

Richtungsvektor **u** = $\binom{4}{8}$; Normale **n** = $\binom{-8}{4}$ → $\binom{-2}{1}$



Mittelpunkt M(3|6); Lotgerade g_L: $\mathbf{x} = \binom{3}{6} + t\binom{-2}{1}$

Abstand M zu Q: **q** - **m** = t $\binom{-2}{1}$ → d = $\sqrt{4t^2 + t^2} = \pm\sqrt{5}$ t

Q_1 und Q_2 liegen daher symmetrisch zu M auf g_L

Aufgrund des Gesamtabstands 2 $\sqrt{5}$ ist t = ± 1

t = +1: $\mathbf{q_1} = \begin{pmatrix} 3-2=1 \\ 6+1=7 \end{pmatrix}$; t = -1: $\mathbf{q_2} = \begin{pmatrix} 3+2=5 \\ 6-1=5 \end{pmatrix}$

⇒ Q_1(1|7); Q_2(5|5)

9) g: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u} = \mathbf{a} + t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix}$; P auf g: $\mathbf{p} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u}$

$\overrightarrow{\mathbf{AP}} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u} - \mathbf{a} = r\,\mathbf{u}$; Ortsvektor für B $\mathbf{b} = \mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{u}$

Damit $\overrightarrow{\mathbf{BP}} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u} - \mathbf{a} - \mathbf{u} = (r - 1)\,\mathbf{u}$

Doppelter Abstand zu A: $|r\,\mathbf{u}| = 2\,|(r - 1)\,\mathbf{u}|$

Ausführlich angeschrieben: $\sqrt{r^2\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right)} = \sqrt{r^2}\,|u| = \pm r\,|u|$

Damit: $\pm r = \pm 2\,(r - 1) \rightarrow$ Für "++" und "--" r = 2, für "+-" und "-+" r = 2/3

r=2: $\mathbf{p_1} = \begin{pmatrix}1-6\\2-10\\3-14\end{pmatrix} \rightarrow P_1(-5|-8|-11)$; r = 2/3: $\mathbf{p_2} = \begin{pmatrix}1-2\\2-10/3\\3-14/3\end{pmatrix} \rightarrow P_2(-1|-4/3|-5/3)$

(Die Abstände zu B sind für P1 d = $\sqrt{83}$ und für P2 d = $\sqrt{83}$ / 3.)

Die Lagen der Punkte sind auch geometrisch herzuleiten bzw. einzusehen: