Analytische Geometrie - Lagebeziehungen Gerade / Gerade

Teil 2 Parameterform R^3

Möglichkeiten

(1) parallel,

(2) identisch,

(3) die Geraden schneiden sich.

(4) sie laufen aneinander vorbei, ohne Schnittpunkt; sog. "windschiefe Geraden".

Schrittweises Verfahren

- Wie in R^2 kann zuerst über **u** auf parallel testen.
- Falls dies zutrifft, überprüfen ob ein Punkt einer Geraden auch auf der anderen liegt. Am einfachsten den Aufpunkt einer Geraden benutzen. Falls "ja", dann liegen sind die Geraden identisch.
  (Erinnerung: Verschiedene Zahlen in den Formeln können trotzdem dasselbe geometrische Objekt beschreiben.)
- Anders als bei R^2 verbleiben jetzt noch <u>zwei</u> Möglichkeiten: Schnittpunkt oder windschief. Bei einem Schnittpunkt gibt es eine Lösung für das Lineare Gleichungssystem in Koordinaten.

Wenn man sofort mit dem Linearen Gleichungssystem beginnt:

$\rightarrow$ genau 1 Lösung: Schnittpunkt

$\rightarrow$ unendlich viele Lösungen: identisch

$\rightarrow$ keine Lösung: parallel oder windschief;
Entscheidung über "kollineare Richtungsvektoren?"

Hinweis: In R^3 haben wir nur die Parameterform.

g1: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u}$ und g2: $\mathbf{x} = \mathbf{b} + s\,\mathbf{v}$

- **Sofort ein Lineares Gleichungssystem für die Koordinaten lösen. Das liefert in 1 Schritt Informationen über die gegenseitige Lage und bei sich schneidenden Geraden die Koordinaten des Schnittpunkts.**
- **Zuerst auf Sonderfälle parallel oder identisch untersuchen. Das kann eventuell die Rechenarbeit reduzieren.**
-

1. Parallele Geraden

g1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$; g2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-8\\10\\-12\end{pmatrix}$

Erkennbar: **v** = -2 **u**. Die Geraden sind auf jeden Fall parallel. Auch identische Gerade?

Gleichungssystem - Aufpunkt von g2 auch durch g1 erreichbar?

$7 = 1 + 4r \quad r = 3/2$

$8 = 2 - 5r \quad r = -6/5$ (Man könnte schon jetzt die Rechnung für die dritte Koordinate auslassen)

$9 = 3 + 6r \quad r = 1$

Es gibt <u>kein</u> r, dass für <u>alle</u> Koordinaten gilt. g1 und g2 sind nicht identisch. $\Rightarrow$ <u>parallel</u>

Lineares Gleichungssystem (Nur zur Illustration des Verfahrens!)

[1]	1 + 4 r = 7 - 8 s	→ 4 r + 8 s = 6	→ 2 r + 4 s = 3
[2]	2 - 5 r = 8 + 10 s	→ -5 r - 10 s = 6	
[3]	3 + 6 r = 9 - 12 s	→ 6 r + 12 s = 6	→ r + 2 s = 1

	r	s	(rechte Seite)	
[1]	2	4	3	
[2]	-5	-10	6	
[3]	1	2	1	
----------------				
[1]	2	4	3	
[2']	-2	-4	2,4	| = [2] · 2/5
[3']	2	4	1	| = [3] · 2
----------------				
[1]	2	4	3	
[2"]	0	0	5,4	| = [1] +[2']
[3"]	0	0	2	| = [1] - [3']

Zeilen [2"] und [3"] enthalten einen Widerspruch. Es gibt keine Lösung ⇒ Die Geraden sind parallel oder windschief zueinander. Mit dem Ergebnis **v** = -2 **u** ⇒ Parallele Geraden

(Offenkundig umständlicher als die vorige Variante!)

2. Identische Geraden

g1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$; g2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-3\\7\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-8\\10\\-12\end{pmatrix}$

Erkennbar: **v** = -2 **u**. Parallel. Auch identisch?

-3 = 1 + 4 r   r = -1

7 = 2 - 5 r   r = -1

-3 = 3 + 6 r   r = -1

Es gibt ein r, dass für alle Koordinaten gilt. Ein Punkt liegt auf g1 und g2. Weil vorher "parallel" festgestellt wurde, sind dies identische Geraden ⇒ identisch

Lineares Gleichungssystem (Nur zur Illustration des Verfahrens!)

[1]	1 + 4 r = -3 - 8 s	→ 4 r + 8 s = -4	r + 2 s = -1
[2]	2 - 5 r = 7 + 10 s	→ -5 r - 10 s = 5	-r - 2 s = 1
[3]	3 + 6 r = -3 - 12 s	→ 6 r + 12 s = -6	r + 2 s = -1

	r	s	
[1]	1	2	-1
[2]	-1	-2	1
[3]	1	2	-1

Es folgt eine Lösung mit einem Parameter. Für jedes r = -1 - 2 s gilt das Gleichungssystem. Das bedeutet unendlich viele Lösungen ⇒ identisch

3. Sich schneidende Geraden

g1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$; g2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-7\\4\\-5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix}$

Erkennbar: **v** ist kein Vielfaches von **u**. Damit sind g1 und g2 nicht parallel und nicht identisch.

Lineares Gleichungssystem (Das <u>muss</u> jetzt gelöst werden.)

[1]	1 + 4 r = -7 + 8 s	→ 4 r - 8 s = -8	r - 2 s = - 2
[2]	2 - 5 r = 4 + 6 s	→ -5 r - 6 s = 2	
[3]	3 + 6 r = -5 + 4 s	→ 6 r - 4 s = -8	3 r - 2 s = -4

	r	s		
[1]	1	-2	-2	
[2]	-5	-6	2	
[3]	3	-2	-4	
----------				
[1]	1	-2	-2	
[2']	0	-16	-8	| = 5 · [1] + [2]
[3']	0	-4	-2	| = 3 · [1] - [3]
----------				
[1]	1	-2	-2	
[2"]	0	-2	-1	| = |2'] / 8
[3"]	0	-2	-1	| = [3'] / 2

Lösung s = 1/2; s in [1]: r - 2· 1/2 = -2 → r = -1 → Lösung {r, s} gefunden, Schnittpunkt vorhanden

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\7\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\4\\-5\end{pmatrix} + 1/2\begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix} \Rightarrow$ S(-3|7|-3)

4. Windschiefe Geraden

g1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$; g2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}7\\-5\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}8\\4\\6\end{pmatrix}$

Erkennbar: **v** ist kein Vielfaches von **u**. Damit sind g1 und g2 nicht parallel und nicht identisch.

Lineares Gleichungssystem

[1]	1 + 4 r = 7 + 8 s	→ 4 r - 8 s = 6	2 r - 4 s = 3
[2]	2 - 5 r = -5 + 4 s	→ -5 r - 4 s = -7	
[3]	3 + 6 r = 4 + 6 s	→ 6 r - 6 s = 1	

	r	s		
[1]	2	-4	3	
[2]	-5	-4	-7	
[3]	6	-6	1	
----------				
[1]	1	-2	-2	
[2']	0	-28	1	| = 5 · [1] + 2 · [2]
[3']	0	-6	8	| = 3 · [1] - [3]
----------				
[1]	1	-2	-2	
[2"]	0	-28	1	| = |2'] / 8
[3"]	0	-2	-1	| = [3'] / 2

[2']: s = -1/28; [3']: s = -4/3 → Widerspruch → parallel oder windschief.

Weil die Geraden nicht parallel sind ⇒ <u>Windschiefe</u> Geraden

Widerspruch. Weil die Geraden nicht parallel sind ⇒ <u>Windschiefe</u> Geraden