Analytische Geometrie - Beispiele Umrechnung Formen (g,E)

Parameterform ↔ Normalenform

Möglichkeiten

1. Gerade in R^2

☑ Parameterform: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u}$

☑ Normalenform: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$

2. Gerade in R^3

☑ Parameterform: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{u}$

☒ Normalenform: Es gibt keine (eindeutige) Normalenform.

3. Ebene in R^2

☒ Parameterform: Sinnlos; R^2 stellt selbst eine "Ebene" dar.

☒ Normalenform: Es gibt keine Normalenform.

4. Ebene in R^3

☑ Parameterform: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{v}$

☑ Normalenform: $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$

! Eindeutig ist (nur) die Struktur der Formeln.

Für die Koordinatendarstellung gibt es jeweils unendlich viele Möglichkeiten.

- Jeder Punkt auf der Geraden (in der Ebene) ist für **a** möglich.
- Jeder kollineare Vektor ist für **n**, **u**, **v** möglich.

Damit sind verschieden aussehende Gleichungen möglich, die aber identische Objekte beschreiben!

Umrechnung

PF = Parameterform, NF = Normalenform

Stets: Der Ortsvektor für den Aufpunkt **a** kann in beiden Formen gleich gewählt werden**.**

(Ansonsten muss es natürlich ein anderer Punkt sein, der auf der Geraden bzw. in der Ebene liegt!)

Stets: Für die Normale und die Richtungsvektoren kann auch ein beliebiger kollinearer Vektor eingesetzt werden.

Damit können "schönere" Zahlen erhalten werden.

1. Gerade in R^2

u und **n** enthalten eine "Vertauschung" der Koordinaten. (Das liefert am schnellsten eine Möglichkeit. Jeder andere kollineare Vektor ist natürlich ebenfalls möglich!)

PF ↔ NF: $\mathbf{u} = \binom{u_x}{u_y} \Leftrightarrow \mathbf{n} = \binom{-u_y}{u_x}$

- PF→ NF g: $\mathbf{x} = \binom{8}{9} + t\binom{1}{2}$

  $\mathbf{u} = \binom{1}{2} \rightarrow \mathbf{n} = \binom{-2}{1}$

  $\Rightarrow$ g: $\left[\mathbf{x} - \binom{8}{9}\right] \cdot \binom{-2}{1} = 0$

- NF → PF g: $\left[\mathbf{x} - \binom{8}{9}\right] \cdot \binom{3}{4} = 0$

  $\mathbf{n} = \binom{3}{4} \rightarrow \mathbf{u} = \binom{-4}{3}$

  $\Rightarrow$ g: $\mathbf{x} = \binom{8}{9} + t\binom{-4}{3}$

  Wenn als Normalenform nicht $(\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$ sondern $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$ vorliegt, ist die Information zu **a** in der rechten Seite enthalten. **u** wird wieder direkt aus **n** erhalten.
  Für die 2 Koordinaten von **a** liegt 1 Angabe (**a·n**) vor. 1 Koordinate ist frei wählbar, die andere mit **a·n** bestimmt.

  g: $\mathbf{x} \cdot \binom{3}{4} = 60$; $\mathbf{u} = \binom{-4}{3}$; Ansatz $\mathbf{a} = \binom{x}{y} \rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 3x + 4y = 60 \rightarrow y = 15 - 3/4\,x$

  Sei $x = 8 \rightarrow y = 9 \Rightarrow$ g: $\mathbf{x} = \binom{8}{9} + t\binom{-4}{3}$

  Genauso wie für **u** jeder kollineare Vektor möglich ist, sind auch andere Paare {x, y} möglich.

  g: $\mathbf{x} = \binom{4}{12} + t\binom{-4}{3}$ ist auch eine mögliche Parameterform. ($3 \cdot 4 + 4 \cdot 12 = 60$, also gleicher Wert **a·n**.)

  Formal: Sei mit dem Aufpunkt $\mathbf{a_1}$: $\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{n} = Z$. Dann ist mit einem anderen Aufpunkt $\mathbf{a_2} = \mathbf{a_1} + r\,\mathbf{u}$:
  $\mathbf{a_2}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a_1}\cdot\mathbf{n} + r\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a_1}\cdot\mathbf{n} = Z$, weil $\mathbf{u} \perp \mathbf{n}$.

2. Ebene in R^3

- PF→ NF E: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

  Bestimmung von **n**

  a) 2 lineare Gleichungen $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0$ und $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$ und ein freier Parameter für eine dritte Koordinate von n.

  b) Kreuzprodukt $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

  a) Für n_z freier Parameter t

  [1] $1\cdot n_x + 2\cdot n_y + 3\cdot t = 0$

  [2] $4\cdot n_x + 5\cdot n_y + 6\cdot t = 0$

  [2'] $-3\cdot n_y - 6\cdot t = 0$ | = [2] - 4 · [1]

  [2']: $n_y = -2\cdot t$; in [1]: $n_x - 4\cdot t + 3\cdot t = 0 \Rightarrow n_x = t$

  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}t\\-2\,t\\t\end{pmatrix}$; zum Einsetzen "schöne" Zahlen gewählt: $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

ii) Kreuzprodukt **u** x **v** mit Sarrus-Schema oder Determinanten-Entwicklung

i	**j**	**k**	**i**	**j**	**i**: 12 - 15 = -3	
1	2	3	1	2	**j**: 12 - 6 = 6	
4	5	6	4	5	**k**: 5 - 8 = -3	-3 **i** + 6 **j** - 3 **k**

$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ wieder zum Einsetzen "schöne" Zahlen gewählt: $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ E: $\left[x - \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

♦ NF→ PF E: $\left[x - \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ (absichtlich gleiche Ebene wie vorher!)

Durch "geschicktes Raten" definieren wir eine Möglichkeit, die **u·n** = 0 und **v·n** = 0 erfüllt.

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -n_y \\ n_x \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -n_z \\ n_y \end{pmatrix}$ (siehe das "Rezept" für orthogonale Vektoren, V01)

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ E: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

? Kann das stimmen? Vorher hatten wir E: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

JA!

In der Parameterform müssen 2 linear unabhängige Richtungsvektoren vorliegen.

Jede beliebige Linearkombination, die wieder zu 2 linear unabhängigen Vektoren führt, kann eingesetzt werden!

Die vorigen Richtungsvektoren sind eine Linearkombination der jetzigen:

$1/2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3/2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$