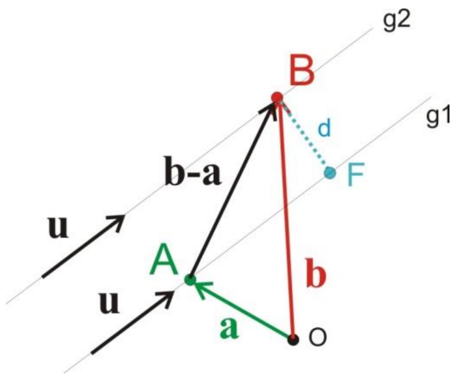
Abstandsberechnung Gerade - Gerade (Kreuzprodukt)

1. Parallele Geraden



g1: $\mathbf{a} + t\,\mathbf{u}$

g2: $\mathbf{b} + s\,\mathbf{u}$

Gleiche Richtungsvektoren, aber verschiedene Aufpunkte.

In R^2: $d = |(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{n_o}|$ mit $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$.

In R^3: $d = |(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times \mathbf{u_o}|$

Der Lotfußpunkt F wird nicht berechnet.

Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{FB}$ zeigt in dieselbe Richtung wie die Normale $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ und hat die Länge d.

Für R^2 ist das die Hesse-Normalenform. In Koordinaten kann **n** leicht durch eine "Vertauschung" der Koordinaten von **u** bestimmt werden. Die weitere Herleitung ist identisch zum Fall "Abstand Punkt - Gerade".

Für R^3 ist die Herleitung identisch zum Fall "Abstand Punkt - Gerade".

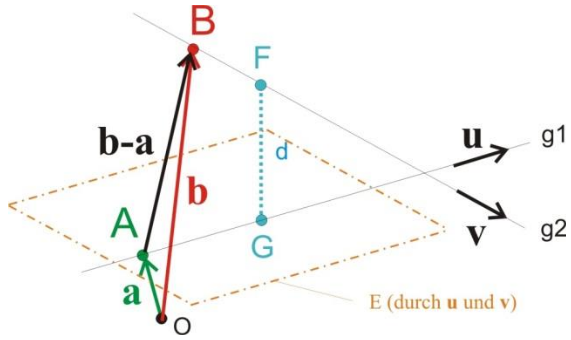
Anmerkung: Die Formel für R^2 kann nicht auf den Fall R^3 angewendet werden, weil es in R^3 keine eindeutige Normale gibt. Die Formel für R^3 kann nicht auf den Fall R^2 angewendet werden, weil in R^2 kein Kreuzprodukt definiert ist.

2. Windschiefe Geraden

g1: $\mathbf{a} + t\,\mathbf{u}$; g2: $\mathbf{b} + s\,\mathbf{v}$

Verschiedene Richtungsvektoren und verschiedene Aufpunkte.

Idee:



1. g1 wird in eine Ebene E gelegt. Als Aufpunkt der Ebene wird am einfachsten der Aufpunkt von g1 benutzt. Die beiden Richtungsvektoren der Ebene sind **u** und **v**.
2. Eine Normale auf diese Ebene E steht senkrecht auf **u** <u>und</u> senkrecht auf **v**!
3. Mit der Hesse Normalenform kann der Abstand eines Punktes von dieser Ebene berechnet werden. Als Vektor betrachtet ist dies eine Richtung senkrecht zur Ebene. Damit senkrecht auf **u**, also senkrecht zur Geraden g1. Ebenso senkrecht auf **v**, also senkrecht zur Geraden g2.
4. Dieser Abstand d ist der kürzeste Abstand zwischen den Geraden g1 und g2.

In der Skizze ist dieser Abstand die Verbindungslinie zwischen den Lotfußpunkten F und G. F und G werden nicht berechnet!

Die Normalenform der Ebene ist $(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$.

$\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ und $\mathbf{n} \perp \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

Abstand des Punkts B (Ortsvektor **b**) von E: $d = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o}$.

$\mathbf{n_o} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_\mathbf{o} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \,/\, |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

Üblicherweise gibt man als Abstand den Betrag an:

Endformel: $d = |(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_\mathbf{o}|$

3. Beispiel R^2 (Parallele Geraden)

Zuerst der richtige Lösungsweg in R^2 - Anwendung der Hesse Normalenform

g1: $\mathbf{a} + t\,\mathbf{u} = \binom{1}{2} + t \cdot \binom{3}{4}$; g2: $\mathbf{b} + s\,\mathbf{v} = \mathbf{b} + s\,\mathbf{u} = \binom{6}{7} + s \cdot \binom{3}{4}$;

(wir verwenden am einfachsten $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ für die parallele Gerade g2)

$\mathbf{n} = \binom{-4}{3}$; $|\mathbf{n}| = 5$

$d = |(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{n_o}| = |\ \binom{5}{5} \cdot \binom{-4}{3}\ |\ / 5 = \left|\binom{5}{5} \cdot \binom{-4}{3}\right| / 5 = |-20 + 15| / 5 = 1$

<u>"Listige Variante": Anwendung der R^3-Formel auf das R^2-Problem</u>:

Macht so etwas Sinn? Erstens dient es zum Verständnis - das ist auch der Zweck hier! In der Praxis wäre denkbar, dass man nur 1 Programm geschrieben hat - für eine Auswertung in R^3. Man könnte dann dieses Programm auch auf die R^2-Fälle anwenden.

Durch eine Erweiterung mit der z-Koordinate erzeugen wir künstlich eine Aufgabe in R^3.
$|\mathbf{u}| = 5$

Dafür gilt dann: $d = |(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times \mathbf{u_o}|$. $(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times \mathbf{u_o} = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \cdot 1/5$

Sarrus-Schema, ohne Faktor 1/5:

i	**j**	**k**	**i**	**j**	**i**: 0 - 0 = 0
5	5	0	5	5	**j**: 0 - 0 = 0
3	4	0	3	4	**k**: 20 - 15 = 5

Determinanten-Entwicklung

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 5 & 5 & 0\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix}5 & 0\\ 5 & 0\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}5 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}5 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$$

(Wie zu erwarten, zeigt das Vektorprodukt in die z-Richtung, da **b-a** und **u** in der x,y-Ebene liegen.)

Damit $d = 5 \cdot$ Vorfaktor $1/5 = 1$.

4. Beispiel R^3 (Parallele Geraden)

Hier haben wir ein durchgerechnetes Beispiel schon vorliegen! Im Teil "Abschnittsberechnung Punkt - Gerade in R^3" haben wird den Abstand eines Punkts P von einer Geraden g berechnet.

Dort: g: $\mathbf{a} + t\,\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$; Punkt außerhalb der Gerade P: $\mathbf{p} = \begin{pmatrix}-6\\7\\8\end{pmatrix}$

Lösung: $d = \sqrt{4694}\,/\,\sqrt{50} \approx 9{,}689$

Jetzt habe die Gerade g2 als Aufpunkt B diesen Punkt P. **u** von g2 ist wegen der Parallelität gleich **u** von g1. Der weitere Rechenweg ist identisch.

4. Beispiel R^3 (Windschiefe Geraden)

Zwei durchgerechnete Beispiele finden sich unter "Lotfußpunktverfahren Gerade/Gerade R^3"

5. Zusätzliche Verständnisfragen

A R^2: Wir berechnen die Abstände zweier Geraden. Aber wir haben keine Information, zwischen welchen Punkten der Geraden diese Abstände ermittelt wurden. Bei den parallelen Geraden ist in der Herleitung der Formel in der Skizze der Abstand d die Strecke zwischen dem Punkt B auf g2 (mit Ortsvektor **b**) und einem Lotfußpunkt F auf g1. Kann dieser Punkt F berechnet werden?

B Windschiefe Gerade: Enthält die Herleitung nicht einen Fehler? Berechnet wird doch der Abstand zwischen B und der Ebene, der kürzeste Abstand liegt aber zwischen F und G! (G liegt auf der Ebene E, aber B kann irgendwo auf g2 liegen.)

C Was geschieht, wenn beim Fall "parallele Geraden" zwei gleiche Geraden eingesetzt werden? Es sollte dann der Abstand Null sein! (Es wäre ja möglich, dass "irrtümlicherweise" in g2 ein kollinearer Vektor für **u** benutzt wurde und ein Aufpunkt B (mit Ortsvektor **b**), der auch auf g1 liegt.)

D Was geschieht, wenn beim Fall "parallele Geraden" die Formel irrtümlich auf zwei sich schneidende Geraden anwenden will?

E Was geschieht, wenn beim Fall "windschiefe Geraden" zwei parallele eingesetzt werden. Folgt dann auch noch der richtige Abstand? Oder muss dieser Fall vorher überprüft werden?

F Was geschieht, wenn beim Fall "windschiefe Geraden" zwei sich schneidende Geraden eingesetzt werden? Es sollte dann der Abstand Null sein!

6. Lösungen zu den Verständnisfragen

Zu A

> R^2: Wir berechnen die Abstände zweier Geraden. Aber wir haben keine Information, zwischen welchen Punkten der Geraden diese Abstände ermittelt wurden. Bei den parallelen Geraden ist in der Herleitung der Formel in der Skizze der Abstand d die Strecke zwischen dem Punkt B auf g2 (mit Ortsvektor **b**) und einem Lotfußpunkt F auf g1. Kann dieser Punkt F berechnet werden?

F ist der Schnittpunkt einer Gerade mit dem Punkt B und dem Richtungsvektor **n** mit der Geraden g1. Daraus folgt die Gleichung mit 2 Unbekannten:

$\mathbf{a} + t\,\mathbf{u} = \mathbf{b} + r\,\mathbf{n}$ bzw. $t\,\mathbf{u} - r\,\mathbf{n} + \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$

Üblicherweise formuliert man das mit den Koordinaten als "2 lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten".

$t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - r\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

[1] $3t + 4r - 5 = 0$

[2] $4t - 3r - 5 = 0$

[1'] $3t + 12r - 5 = 0$ | = [1] · 3

[2'] $4t - 12r - 5 = 0$ | = [2] · 4

$25t - 35 = 0$ | = |1'] + [2']

→ t = 7/5; eingesetzt in [1]: 4 r = 5 - 21/5 = 4/5 → r = 1/5

Damit F (aus g1): $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 7/5\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}26/5\\38/5\end{pmatrix}$

Kontrolle F (aus der Geraden durch P): $\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix} + 1/5\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}26/5\\38/5\end{pmatrix}$

Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{\mathbf{FP}}$ ist $\begin{pmatrix}6-26/5\\7-38/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} / 5$.

Dessen Länge ist 5/5 = 1 (wie vorher mit der Hesse Normalenform berechnet)

Für eine Abstandsberechnung ist dies das Lotfußpunktverfahren, mit offenkundig größerem Rechenaufwand als die Hesse-Formel!

Wer mag, kann auch die Lösung des linearen Gleichungssystems vermeiden.

(... Wenn dies einem Schüler vom Lehrer erlaubt wird.)

Wenn die Gleichung für den Schnittpunkt **a** + t **u** = **b** + r **n** mit **n** skalar multipliziert wird, entsteht **a**·**n** + t · **u**·**n**= **b**·**n** + r · **n**·**n**. Wegen **u** ⊥ **n** ist **u**·**n** = 0. Und **n**·**n** = $|\mathbf{n}|^2$.

Geordnet folgt entsteht **a**·**n** - **b**·**n** = r · $|\mathbf{n}|^2$ und r = (**a** - **b**)·**n** / $|\mathbf{n}|^2$.

Analog entsteht nach Multiplikation mit **u**: t = - (**a** - **b**)·**u** / $|\mathbf{u}|^2$.

Mit Koordinaten: $r = \begin{pmatrix}1-6=-5\\2-7=-5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} / 25 = (20 - 15) / 25 = 1/5$

$t = -\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} / 25 = -(-15 - 20) / 25 = 7/5$

Für F müssen r oder t wieder geeignet eingesetzt werden, wie oben.

(Es ist öfters so, dass für einen geringeren Aufwand beim Konzipieren der Formeln ein größeren Aufwand bei der Detailrechnung zu den Koordinaten folgt.)

(Für R^3 liefert das Lotfußpunktverfahren dieses gesuchte F.)

Zu B

> Windschiefe Gerade: Enthält die Herleitung nicht einen Fehler? Berechnet wird doch der Abstand zwischen B und der Ebene, der kürzeste Abstand liegt aber zwischen F und G!
> (G liegt auf der Ebene E, aber B kann irgendwo auf g2 liegen.)

Berechnet wird der Abstand zwischen der Geraden g2 und der Ebene E. Dieser ist auf jedem Punkt von g2 gleich! E wurde so definiert, dass die Ebene parallel zu g1 <u>und</u> g2 ist! <u>Damit hat jeder Punkt von g2 den gleichen senkrechten Abstand zur Ebene</u>. (Für jeden verschiedenen Punkt von g2 ist zwar der Lotfußpunkt auf E ein anderer, aber der Abstand ist gleich.)

<u>*Formal*</u>:

Normalenform von E: (**x**-**a**)·**n** = 0 mit **n** = **u** x **v**.

Für den Abstand eines Punkts mit Ortsvektor **x** (außerhalb E): d = (**x**-**a**)·$\mathbf{n_o}$.

x liegt auf g2: **x** = **b** + s · **v**.

Eingesetzt: d = (**b** + s · **v** - **a**)·$\mathbf{n_o}$ = (**b**-**a**)·$\mathbf{n_o}$ + s · **v**·$\mathbf{n_o}$ und mit **v** ⊥ $\mathbf{n_o}$:
d = (**b**-**a**)·$\mathbf{n_o}$ also insgesamt (als Betrag) d = |(**b** - **a**)·(**u** x **v**)$_\mathbf{o}$ |

Zu C

> Was geschieht, wenn beim Fall "parallele Geraden" zwei gleiche Geraden eingesetzt werden? Es sollte dann der Abstand Null sein! (Es wäre ja möglich, dass "irrtümlicherweise" in g2 ein kollinearer Vektor für **u** benutzt wurde und ein Aufpunkt B (mit Ortsvektor **b**), der auch auf g1 liegt.)

g1: **x** = **a** + t **u** und g2: **x** = **b** + s **v**
"Friedolin Schlaumeier" erkennt zwar, dass **u** und **v** kollinear sind. Er erkennt nicht, dass **b** auch auf g1 liegt und vermutet daher "parallele" Geraden. Darum setzt er **a** und **b** in die entsprechenden Formeln zur Berechnung von d ein.
<u>*Rechnung R^2*</u>: Weil die Geraden in Wirklichkeit gleich sind, liegt **b** auch auf g1.
(**b**-**a**)·$\mathbf{n_o}$ = (**a** + t **u** - **a**)·$\mathbf{n_o}$ = t · **u**·$\mathbf{n_o}$ = 0, weil **u** ⊥ $\mathbf{n_o}$.
<u>*Rechnung R^3*</u>: (Wie bei R^2) **b** liegt auch auf g1.
(**b**-**a**) x $\mathbf{u_o}$ = t · **u** x $\mathbf{u_o}$ = t · **0**, damit d = 0. Das Kreuzprodukt aus zwei kollinearen Vektoren ist der Nullvektor.

<u>*Beispiel R^2*</u>: g1: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ + t·$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$; g2: $\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}$ + s·$\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}$.
n aus u bestimmt: **n** = $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$; |**n**| = 5.
(**b**-**a**) = $\begin{pmatrix}-5-1\\-6-2\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}$
(**b**-**a**) · $\mathbf{n_o}$ = $\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}$ · $\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$ · $\frac{1}{5}$ = (24 -24) · 1/5 = 0
Wie erwartet, Abstand 0 für identische Geraden.

<u>*Beispiel R^3*</u>: g1: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ + t·$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$; g2: $\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}$ + s·$\begin{pmatrix}-4\\-5\\-6\end{pmatrix}$.
|**u**| = $\sqrt{77}$; (**b**-**a**) = $\begin{pmatrix}-3-1\\-3-2\\-3-3\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}-4\\-5\\-6\end{pmatrix}$.
(**b**-**a**) x $\mathbf{u_o}$: Eine Rechnung würde einen Nullvektor und damit als Betrag den Abstand d = 0 liefern. Schneller ist, <u>sofort</u> zu benutzen, dass das Kreuzprodukt aus zwei kollinearen Vektoren der Nullvektor ist - und damit der Betrag 0.

Zu D

> Was geschieht, wenn beim Fall "parallele Geraden" die Formel irrtümlich auf zwei sich schneidende Geraden anwenden will?

Dann wurde die Voraussetzung der Formeln nicht beachtet! Entweder ein "hoffnungsloser Fall - bezogen auf den Löser der Aufgabe" oder man hat sich verrechnet, schließt auf kollineare **u** und **v** und setzt willkürlich einen der beiden Vektoren ein. Dann erhält man irgendeinen, aber <u>falschen</u>, Abstand!

Zu E

> Was geschieht, wenn beim Fall "windschiefe Geraden" zwei parallele eingesetzt werden. Folgt dann auch noch der richtige Abstand? Oder muss dieser Fall vorher überprüft werden?

Ein "verzwickter Fall". Anschaulich meint man ja, der Abstand sollte zu bestimmen sein, weil nach der Skizze auch bei parallelen Geraden g2 nicht in der "Ebene" darunter liegt. ABER: Parallele Geraden haben kollineare Richtungsvektoren **u** und **v**! Für kollineare Vektoren **u** und **v** ist keine Ebene E definiert und die Normale **u** x **v** ist der Nullvektor. Die Berechnungsformel liefert also den falschen Abstand 0!

Es muss darauf geachtet werden, ob in der Herleitung einer Formel nicht irgendwelche Annahmen enthalten sind. Speziell hier: Eine Ebene mit den Richtungsvektoren **u** und **v** wird benutzt.

Zu F

> Was geschieht, wenn beim Fall "windschiefe Geraden" zwei sich schneidende Geraden eingesetzt werden? Es sollte dann der Abstand Null sein!

JA! (Man würde den richtigen Abstand 0 erhalten.) Zuerst das Zahlenbeispiel, dann die formale Begründung.

Beispiel: g1: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$; g2: $\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt ist $\begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix}$ für t = 1 und s = 1.

$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix}2-1=1\\5-2=3\\8-3=5\end{pmatrix}$ und $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_0 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$

Mit Sarrus-Schema

i	**j**	**k**	**i**	**j**	**i**: 5 - 12 = -7
4	5	6	4	5	**j**: 18 - 4 = 14
3	2	1	3	2	**k**: 8 - 15 = -7

Anstelle von $\begin{pmatrix}-7\\14\\-7\end{pmatrix}$ verwenden wir einen kollinearen Vektor mit "schöneren" Zahlen.

$d = |(\mathbf{b} - \mathbf{a})\cdot(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_0| = \left|\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right| / \sqrt{6} = (1 - 6 + 5) / \sqrt{6} = 0$

Formal: Für sich schneidende Geraden gilt : **x** = **a** + t **u** = **b** + s **v**

damit **u** = (**b** + s **v** - **a**) / t

Nun das Kreuzprodukt der Abstandsformel, ohne den Faktor 1/t:

u x **v** = (**b** + s **v** - **a**) x **v** = **b** x **v** + s **v** x **v** - **a** x **v**. Darin **v** x **v** = 0 (kollinear!)

Nun das Skalarprodukt, wieder ohne den Faktor 1/t. Noch kein Einheitsvektor gebildet.

(Wir erwarten als Ergebnis den Nullvektor!)

$$\begin{aligned}(\mathbf{b} - \mathbf{a})\cdot(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{b} \times \mathbf{v}) - \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{v}) - \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} \times \mathbf{v}) + \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{v}) = \\ &= \mathbf{v}\cdot(\mathbf{b} \times \mathbf{b}) + \mathbf{v}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{v}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{v}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad \mathbf{0} = \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Dabei wurden benutzt: **a** x **b** = - **b** x **a** (antikommutativ) und für das Spatprodukt (gemischtes Produkt)
a·**b** x **c** = **c**·**a** x **b** = **-** **c**·**b** x **a**. Für kollineare Vektoren **a** und **b** ist **a** x **b** = **0**, damit auch **a** x **a** = **0**.