Gerade - Gerade (in R^3)

Der Fall sich schneidender Geraden ist uninteressant. Es existiert dann ein beliebiger Abstand je nach der Wahl der beiden Punkte. Der kleinste "Abstand" ist dann Null.

Parallele Gerade sind einfach zu behandeln. Zu jedem Punkt von g2 existiert ein dazugehörender Punkt auf g1, der die Forderung des "kleinsten Abstands" erfüllt. Man wählt einfach irgendeinen Punkt von g2 und rechnet dann wie im Fall "Punkt - Gerade".

Der Fall windschiefer Geraden ist interessant. Es gibt eine "fertige" Formel mit einem Kreuzprodukt. Damit ist die Abstandsbestimmung sehr einfach! Das Lotfußpunkt-Verfahren erfordert einige Überlegungen in der Herleitung und (schlimmer) einen erheblichen Rechenaufwand (außer durch "günstige" Koordinaten wird dieser etwas eingeschränkt).

Als Bedingung gilt, dass der kleinste Abstand zwischen zwei Punkten auf windschiefen Geraden dann vorliegt, wenn deren Verbindungslinie senkrecht auf beiden Richtungsvektoren steht.

Wenn man dies einsieht oder glaubt, ist ein wichtiger Teil der Herleitung erledigt.

Ebenso ist sofort einsichtig, dass in einer Herleitung des Lotfußpunktverfahrens als Zwischenschritt irgendeine Normalenebene benötigt wird, weil sich eine eindeutige Normale (Gerade) auf eine Gerade in R^3 nicht bestimmen lässt.

Zur anschaulichen Erklärung dienen zwei Geraden auf einem Würfel (Seitenlänge 2). Die untere Gerade g1 geht in Richtung (0|0|0) nach (2|2|0), die obere Gerade g2 in Richtung (0|2|2) nach (2|0|2).

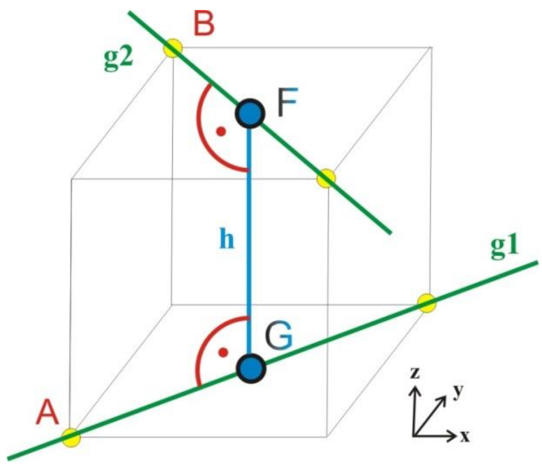
Der jeweils erste Punkt wird als Aufpunkt und die Differenz als Richtungsvektor gewählt. Die Seitenlänge ist 2, damit "schönere" Koordinaten für die Lotfußpunkte folgen.

Die Geraden schneiden sich nicht. Sie sind auch nicht parallel.

(Sie liegen nur in parallelen Ebenen, die Geraden immer noch "windschief".)

Zwei Geraden mit Aufpunkten A und B:

g1: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ und g2: $\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$



Der kürzeste Abstand h kommt in der Mitte vor.

Die Verbindungslinie h steht dann senkrecht auf beiden Geraden g1 und g2.

Von F aus gesehen, ist der Abstand zu jedem anderen Punkt auf g1 größer als der zu B.
Ebenso von G aus zu jedem anderen Punkt auf g2 größer als der zu F.

Nach der Skizze können wir die Koordinaten sofort angeben: G(1|1|0), in der "Mitte" der unteren Fläche, und F(1|1|2) oben. Nun benötigen wir ein Verfahren, diese Punkte auch rechnerisch zu finden.

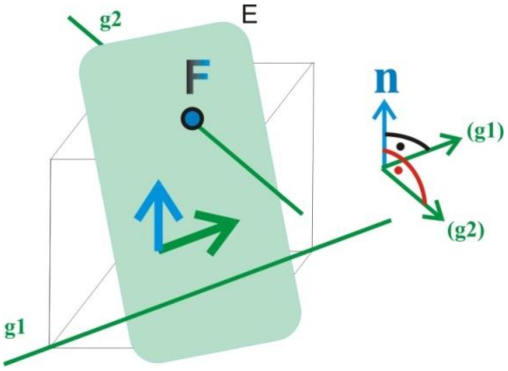
Ein Lotfußpunktverfahren muss nun klären, wie die beiden Lotfußpunkte F und G gefunden werden können. Deren Abstand ist dann auch der gesuchte Abstand zwischen beiden Geraden.

Als erstes erzeugen wir eine Hilfsebene E. Diese wird zweckmäßig in der Parameterform definiert.

E enthält g1, damit ist ein Richtungsvektor der Ebene bekannt.

Der zweite Richtungsvektor **n** soll senkrecht auf g1 und senkrecht auf g2 stehen.

F ist der Durchstoßpunkt der Gerade g2 durch diese Hilfsebene.



F liegt orthogonal zu g2, weil es in der Ebene E liegt und von dieser ist ein Richtungsvektor auch orthogonal zu g2.

Beim Problem Punkt - Gerade hatten wir auch eine Hilfsebene erzeugt. Diese stand senkrecht auf der Geraden. Das tut diese hier auch - in Bezug auf g2! (Beim Problem Punkt - Gerade gab es nur eine Gerade und daher war keine Entscheidung notwendig.)

Durch die Vorschrift, wie wir E erzeugt haben, können wir auch sicher sein, dass F der gewünschte Punkt ist. Es ist ein Lotfußpunkt, zur Richtung von g2 und von **n**.

Ohne weitere Angaben gibt es unendlich viele Ebenen, die alle senkrecht auf g2 stehen, und damit unendlich viele Durchstoßpunkte. Unsere spezielle Definition von E macht aber die Sache eindeutig!

Wenn wir von F in Richtung **n** gehen, treffen wir auf g1.

(Wenn nicht, gehen wir in der Gegenrichtung von **n**. Denn jeder zu **n** kollineare Vektor ist auch möglich. In den Formeln spielt das keine Rolle, denn bei einer Geraden **a** + t **u** gehen wir bei gleichem **u** mit positivem bzw. negativem t in entgegengesetzte Richtungen.)

Denn E wurde so festgelegt, dass g1 auch darin liegt! Der Schnittpunkt der Hilfsgeraden h, mit dem Aufpunkt F und dem Richtungsvektor **n**, mit g1 ist dann der zweite gesuchte Punkt G. Weil h auch senkrecht auf g1 steht ist auch G ein "Lotfußpunkt".

Als letztes wird der Abstand $\overrightarrow{FG}$ berechnet.

♦♦♦ **Zusammengefasst:**

1. g1: **x** = **a** + r **u**; g2: **x** = **b** + t **v**. Berechne eine Normale **n**, **n** ⊥ **u** und **n** ⊥ **v**.
   (Am schnellsten wäre hier **n** = **u** x **v**.)
2. Stelle eine Ebenengleichung auf, g1 und **n** einsetzen. E: **x** = **a** + r **u** + s **n**.
3. Berechne den Schnittpunkt F der Hilfsebene E mit der Geraden g2.
   Auflösen von **a** + r **u** + s **n** = **b** + t **v**
   nach r, s, t (3 Gleichungen mit 3 Unbekannten! Rechenarbeit!)
   2 Möglichkeiten F zu berechnen: mit t oder mit r und s.
4. Stelle eine Geradengleichung durch F mit der Richtung **n** auf: h: **x** = **f** + l **n**
5. Berechne den Schnittpunkt G der Hilfsgeraden mit g1: **f** + l **n** = **a** + m **u**
   Berechnung von G mit l oder mit m.

Durch verschiedene Buchstaben l, m sind eventuelle Kontrollen erleichtert!

6. Berechne $\overrightarrow{FG}$ und d = | $\overrightarrow{FG}$ |.

Beispiel 1

1. Normale: g1: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$; g2: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$.
   a) Lineares Gleichungssystem - mit $n_z = z$ für den freien Parameter, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}=0$, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=0$:

      $n_x \cdot 2 + n_y \cdot 2 + z \cdot 0 = 0$ $\quad n_x = -n_y$

      $n_x \cdot 2 + n_y \cdot -2 + z \cdot 0 = 0$ $\quad n_x = n_y$ weil $n_x = \pm n_y$ $n_x = n_y = 0$

   b) Kreuzprodukt

i	**j**	**k**	**i**	**j**	**i**: 0 - 0 = 0
2	2	0	2	2	**j**: 0 - 0 = 0
2	-2	0	2	-2	**k**: -4 - 4 = -8

   Man erhält für n $\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}0\\0\\-8\end{pmatrix}$. Sinnvolle Wahl $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$!

   Erinnerung: Jeder kollineare Vektor ist erlaubt. Man wählt den, für den der weitere Rechenaufwand minimal ist. Hier: n muss nur eine z-Komponente haben.

2. Ebenengleichung (E enthält g1 und **n**)

   $x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

3. Schnitt der Ebene mit g2

   $= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$.

   geordnet und gelöst für r, s und t

2r - 2t = 0	r - t = 0	r = t	t = 1/2
2r + 2t = 2	r + t =1	2 r = 1	r = 1/2
s = 2			s = 2

   damit Schnittpunkt (mit t und Kontrolle mit r,s). Dies ist Lotfußpunkt F

   $\begin{pmatrix}0+\frac{1}{2}\cdot 2 = 1\\ 2+\frac{1}{2}\cdot(-2) = 1\\ 2+\frac{1}{2}\cdot 0 = 2\end{pmatrix}$ und als Kontrolle $\begin{pmatrix}0+\frac{1}{2}\cdot 2+2\cdot 0 = 1\\ 0+\frac{1}{2}\cdot 2+2\cdot 0 = 1\\ 0+\frac{1}{2}\cdot 0+2\cdot 1 = 2\end{pmatrix}$

4. Hilfsgerade - von F mit Richtung **n**

   h: $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

5. G: Schnittpunkt h mit g1

   $\begin{pmatrix}1\\1\\2+l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+2m\\0+2m\\0\end{pmatrix}$

   und gelöst für l, m

m = 1/2 und l = -2

damit Lotfußpunkt G = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2-2=0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 2\cdot\frac{1}{2}=1 \\ 2\cdot\frac{1}{2}=1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. Berechnung $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; d = 2

Wie in der Skizze ist der Abstand gleich der Seitenlänge des Würfels, und F und G liegen in der Mitte der oberen und der unteren Fläche.

Vergleich - Beispiel 1 mit "fertiger" Formel (Kreuzprodukt)

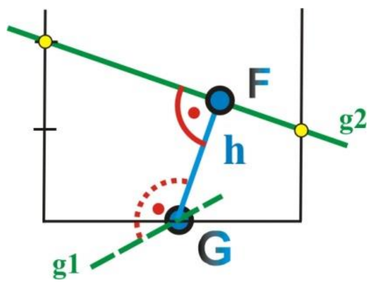
b - **a** = $\begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; (schon vorher berechnet) **u** x **v** = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$; |**u** x **v**| = 8

d = |(**b** - **a**)·(**u** x **v**)$_{\mathbf{o}}$ | = $\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}\right|$ / 8 = | -16 / 8 | = 2

Beispiel 2

In einem zweiten Beispiel ist die 2. Gerade etwas geändert. Die untere Gerade g1 liegt wie im Beispiel 1, die obere g2 geht von (0|2|2) nach (2|0|**1**) statt (2|0|2). Die Rechnung liefert dann die Lotfußpunkte, oben F = (4/3 | 2/3 | 4/3) und unten G = (1|1|0). Ein Schnitt entlang der Geraden g2 zeigt, dass die Verbindunglinie $\overrightarrow{FG}$ senkrecht auf g1 <u>und</u> g2 steht und den kürzesten Abstand liefert.

(Unten ist die Länge des Schnitts $2\sqrt{2}$, G liegt bei $\sqrt{2}$, oben ist die Länge von g2 innerhalb des Würfels 3 und F liegt bei 2/3 davon. g1 verläuft senkrecht zur Zeichenebene.)



1. Normale: g1: **x** = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ + r $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; g2: **x** = $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ + t $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   a) Lineares Gleichungssystem - mit n_z = z für den freien Parameter, **n**·**u**=0, **n**·**v**=0:

   $n_x \cdot 2 + n_y \cdot 2 + z \cdot 0 = 0$ $\qquad n_x = -n_y$

   $n_x \cdot 2 + n_y \cdot -2 + z \cdot -1 = 0$ $\qquad 2\,n_x + 2\,n_x = z \rightarrow n_x = z/4 \rightarrow n_y = -z/4$

   b) Kreuzprodukt

i	**j**	**k**	**i**	**j**	**i**: -2 - 0 = -2
2	2	0	2	2	**j**: 0 - (-2) = 2
2	-2	-1	2	-2	**k**: -4 - 4 = -8

Man erhält für n $\begin{pmatrix} z/4 \\ -z/4 \\ z \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$. Sinnvolle Wahl $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Erinnerung: Jeder kollineare Vektor ist erlaubt. Man wählt den, für den der weitere Rechenaufwand minimal ist.

2. Ebenengleichung (E enthält g1 und **n**)

   $x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$

3. Schnitt der Ebene mit g2

   $= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}.$

   geordnet und gelöst für r, s und t

[1] 2r +s - 2t = 0	2r +s - 2t = 0	2r + s - 2t = 0	2r + s - 2t = 0
[2] 2r -s + 2t = 2	-2r +s -2 t =-2	2s - 4t = -2	2s - 4t = -2
[3] 4s + t = 2	4s + t = 2	4s + t = 2	9t = 6

   t = 2/3 →s = (-2 + 8/3)/2 = 1/3→r =(-1/3 + 4/3) / 2 = 1/2

   damit Schnittpunkt (mit t und Kontrolle mit r,s). Dies ist Lotfußpunkt F

   $\begin{pmatrix}0+\frac{2}{3}\cdot 2 = 4/3\\ 2+\frac{2}{3}\cdot(-2) = 2/3\\ 2+\frac{2}{3}\cdot(-1) = 4/3\end{pmatrix}$ und als Kontrolle $\begin{pmatrix}0+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 1 = 4/3\\ 0+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot(-1) = 2/3\\ 0+\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 4 = 4/3\end{pmatrix}$

4. Hilfsgerade - von F mit Richtung **n**

   h: $\begin{pmatrix}4/3\\2/3\\4/3\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$

5. G: Schnittpunkt h mit g1

   $\begin{pmatrix}\frac{4}{3}+l\\ \frac{2}{3}-l\\ \frac{4}{3}+4l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+2m\\0+2m\\0\end{pmatrix}$

   und gelöst für l, m

   4l = -4/3 →l= -1/3; 2m = 4/3 - 1/3 →m = 1/2; Kontrolle 2m = 2/3 - (-1/3) → m = 1/2.

   damit Lotfußpunkt G = $\begin{pmatrix}4/3\\2/3\\4/3\end{pmatrix} - 1/3 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

   bzw. = $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + 1/2 \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

6. Berechnung $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}4/3-1\\2/3-1\\4/3-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\4/3\end{pmatrix}$; d = $\sqrt{1+1+16}\,/3 = \sqrt{2}$.

Vergleich - Beispiel 2 mit "fertiger" Formel (Kreuzprodukt)

$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; (schon vorher berechnet) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$;

$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{4+4+64} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$d = |(\mathbf{b} - \mathbf{a})\cdot(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_0| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \right| / 8 = |-12 / (6\sqrt{2})| = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$

⇒ Für windschiefe Gerade ist der Rechenaufwand groß!

Mindestens als Kontrolle ist die Formel mit dem Kreuzprodukt sinnvoll.