TEIL 1: Die Quadratische Funktion und die Quadratische Gleichung

Bei linearen Funktionen kommt x nur in der 1. Potenz vor. Bei **quadratischen Funktion** kommt x in der 2. Potenz vor. Daneben kann können noch x in der 1. Potenz ("lineares Glied") und eine Konstante ("absolutes Glied") vorkommen. Bei x^2 und x können noch Zahlen-Vorfaktoren ("Koeffizienten") stehen. Die allgemeinste Form ist daher:

Quadratische Funktion: $\mathbf{y = a\,x^2 + b\,x + c}$

Die quadratische Gleichung ist die Lösung von y = 0:

Quadratische Gleichung: $\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$

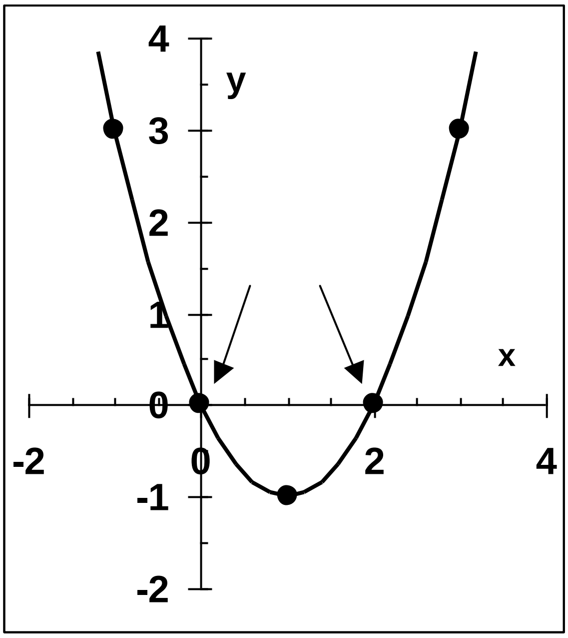
Wir lernen dazu fertige Lösungsformeln! Zuerst wollen wir - etwas Theorie! - uns die Verhältnisse grafisch ansehen. Das hilft uns dann leichter zu verstehen, welche Lösungen möglich sind.

Erstes Beispiel: Funktion $\mathbf{y = x^2 - 2x}$ und die Gleichung $\mathbf{x^2 - 2x = 0}$ dazu.

Über eine **Wertetabelle**

x	-1	0	1	2	3
$x^2 - 2x$	3	0	-1	0	3

zeichnen wir die **Grafik** dazu:



Wir sehen eine gekrümmte Kurve.
(In der Geometrie nennt man das eine **Parabel**.)

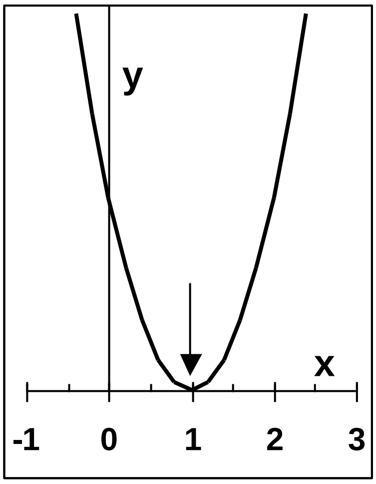
Die Kurve schneidet die x-Achse an zwei Punkten, bei $x_1 = 0$ und bei $x_2 = 2$.
An diesen beiden Punkten gilt y = 0.

$\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ sind die **Nullstellen** der Funktion.
UND:
x_1 und x_2 sind **die Lösungen der quadratischen Gleichung**.
(Wir haben grafisch die Werte gefunden, für die y = 0 gilt.)

Die Lösung der quadratischen Gleichung ist dasselbe wie die Suche von Nullstellen der quadratischen Funktion.

Durch weitere Beispiele sehen wir, dass es noch zwei andere Möglichkeiten gibt, wie die Parabel verlaufen kann und welche Lösungen für die quadratische Gleichung möglich sind!

Zweites Beispiel: Funktion $\mathbf{y = x^2 - 2x + 1}$ und die Gleichung $\mathbf{x^2 - 2x + 1 = 0}$ dazu.



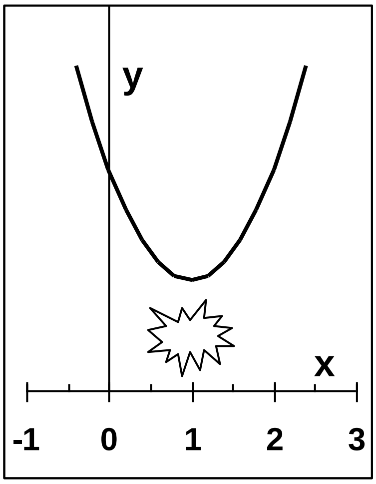
Die Grafik dazu zeigt, dass jetzt die x-Achse nur an **einer** Stelle berührt wird!

Es gibt daher auch **nur eine Lösung** der quadratischen Gleichung.

☺ Weil Mathematiker seltsame Leute sind, erwarten Sie immer 2 Lösungen für eine quadratische Gleichung!

Man nennt diesen **Fall** $\mathbf{x_1 = x_2}$ daher in der Fachsprache auch eine "**Doppellösung**"!

Drittes Beispiel: Funktion $\mathbf{y = x^2 - 2x + 2}$ und die Gleichung $\mathbf{x^2 - 2x + 2 = 0}$ dazu.



Die Grafik dazu zeigt, dass jetzt die x-Achse an **keiner** Stelle berührt wird!

Es gibt daher auch **keine Lösung** der quadratischen Gleichung! (Es gibt keine Stelle, für die $y = 0$ gilt.)

Wir können zwar jede quadratische Funktion zeichnen, aber es gibt nicht für jede quadratische Gleichung eine Lösung!

☹ Zusatzinformation (Schwieriger!)
Wir wissen schon, dass Mathematiker seltsame Leute sind!
Es sollen auch für diesen Fall 2 Lösungen vorkommen - und das obwohl es keinen Schnittpunkt mit der x-Achse gibt! Zur Lösung dieses Widerspruchs hat Gauß die sog. "komplexen Zahlen" erfunden. Zu Klärung werden unsere normalen Zahlen die "reellen Zahlen" genannt. Die Widerspruch löst sich daher so auf: es gibt tatsächlich keine reelle Lösung, sondern nur 2 komplexe Lösungen $\{ x_{1,2} = 1 \pm i \}$.

! Es ist kein Fall denkbar, dass Sie in Ihrer TA-Ausbildung komplexe Zahlen brauchen werden! Falls Sie nicht studieren, gilt dies auch im späteren Berufsleben
Wir bleiben bei dem bisher Bekannten, **also bei den reellen Zahlen!**

Über die grafischen Beispiele haben wir die **drei Möglichkeiten** für die **Lösung von quadratischen Gleichungen** herausgefunden:

Es gibt
- **2 Lösungen**
- **1 Lösung; das nennt man dann eine "Doppellösung"**
- **keine Lösungen**

einer quadratischen Gleichung.

TEIL 2: Rechnerische Lösung der Quadratischen Gleichung

Eine Lösung einer quadratischen Gleichung zu suchen, indem man den Umweg über eine Grafik der dazugehörenden Funktion geht und nachsieht, ob und wo Schnittpunkte mit der x-Achse vorkommen, ist sicher kein gutes Verfahren!

> **Mathematiker haben dafür Lösungsformeln entwickelt. Normalerweise benutzt man einfach diese fertigen Formeln und kümmert sich nicht darum, auf welchem Weg sie hergeleitet wurden.**

Die **allgemeine Form** einer quadratischen Gleichung ist $\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$.
Eine anfangs längere Gleichung kann man durch Zusammenfassen auf diese Grundform bringen. Für die beiden Lösungen x_1 und x_2 gibt es eine fertige **Lösungsformel:**

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Eine alternative Formel entsteht, wenn die Gleichung insgesamt durch a dividiert wird. Dann ist der Koeffizient bei x^2 1. Die beiden anderen Koeffizienten erhalten üblicherweise die Buchstaben p und q. Man nennt das auch die "**normierte Form**": $\mathbf{x^2 + p\,x + q = 0}$.

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Näher an der praktischen Berechnung ist folgende Formel:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Man rechnet zuerst (-p / 2) aus und setzt dann unter der Wurzel das Quadrat davon ein!
(Wenn quadriert ist, spielt das Vorzeichen keine Rolle mehr: $(- p)^2 / 2 = p^2 / 2$.)

Man nennt diese Formel oft abgekürzt die **"p-q-Formel".**

> **Beide Formeln, "a-b-c-Formel" und "p-q-Formel" sind gleich gut!**
> **Wählen Sie diejenige aus, die Ihnen besser gefällt!**
> (Im Studentenjargon heißen diese Formeln auch "Mitternachtsformel". Ein Student sollte sie auch im Schlaf "aufsagen" können. Meine Meinung: die p-q-Formel kann ich mir leichter merken.)

An den angegebenen Lösungsformeln sehen wir auch schnell, wie man die beiden Fälle "Doppellösung" oder "keine Lösung" erkennen kann.

- Wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen 0 ist, ist die Wurzel davon auch 0 und es folgt nur 1 Lösung.
- Wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ ist, gibt es keine (reelle) Wurzel davon, und es gibt dann auch keine Lösung.

Diesen Teilausdruck, der entscheidet, welche Lösungen möglich sind, nennt man die **"Diskriminante" Δ (Delta)** von lateinisch "discriminare" unterscheiden.

	Gleichung	**Diskriminante Δ**
allgemeine Form	$a x^2 + b x + c = 0$	$b^2 - 4 a c$
Normalform	$x^2 + p x + q = 0$	$p^2 / 4 - q$

mit der Entscheidung

Δ > 0	**2 Lösungen**
Δ = 0	**1 Doppellösung**
Δ < 0	**keine (reelle) Lösung**

> Diese Unterscheidung kann am Anfang durchgeführt werden. **Einfacher** ist, mit der Rechnung zu beginnen. Der Ausdruck Δ muss sowieso für jede Lösungsformel berechnet werden. Im Verlaufe der Rechnung, erkennt man dann, ob eine Wurzel aus 0 oder eine Wurzel aus einer negativen Zahl auftritt - und entscheidet die Fälle "zwei Lösungen / Doppellösung / keine Lösung".

WARNUNG: AUF DIE VORZEICHEN ACHTEN!
Die vorkommenden "Minus" werden oft nicht beachtet!

Beispiel 1: $2 x^2 - 4 x - 16 = 0$

1. Weg (allgemeine Form)

Diskriminante $\Delta = b^2 - 4 a c = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-16) = 16 - (-128) = 144$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ Es gibt 2 Lösungen.

$x_{1,2} = (- b \pm \sqrt{\Delta}) / 2 a = (4 \pm 12) / 4$;
$\mathbf{x_1} = 16 / 4 = \mathbf{4}$; $\mathbf{x_2} = (-8) / 4 = \mathbf{-2}$.

2. Weg (Normalform)

Die Normalform entsteht, wenn man durch den Koeffizienten vor x^2 dividiert:
$\mathbf{x^2 - 2 x - 8 = 0}$;
Am einfachsten ist es, zuerst $(-p / 2)$ und dann $(p / 2)^2$ zu berechnen.
$\Delta = (p / 2)^2 - q = 1^2 - (-8) = 9$; $\Delta > 0 \Rightarrow$ Es gibt 2 Lösungen .
$x_{1,2} = (- p / 2) \pm \sqrt{\Delta} = 1 \pm 3$; $\mathbf{x_1 = 4}$; $\mathbf{x_2 = -2}$.

NÜTZLICH! **Wenn eine solche Aufgabe in einer Klausur vorkommt, und ich noch Zeit habe, würde ich die Lösungen kontrollieren!**

Einsetzen von **4**: $2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 - 16 = 32 - 16 - 16 = 0$ ✓
Einsetzen von **-2**: $2 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 16 = 8 - (-8) - 16 = 16 - 16 = 0$ ✓

Beispiel 2: Bei manchen Aufgaben muss man die Gleichung zuerst so umordnen, dass die allgemeine oder die Normalform entsteht.

$$3 x^2 - 6 x = (2 x - 3) \cdot (1 + 2 x)$$

Ausmultipliziert: $3 x^2 - 6 x = 2 x - 3 + 4 x^2 - 6x$
Geordnet: $x^2 + 2 x - 3 = 0$
Gelöst (p-q-Formel): $x_{1,2} = (-1) \pm \sqrt{1 + 3} = (-1) \pm 2$; $\mathbf{x_1 = 1}$; $\mathbf{x_2 = -3}$.

Beispiel 3: Bei Textaufgaben die Schwierigkeit, die Formeln zum Text zu finden.

Wird das Doppelte einer Zahl mit der um 4 vergrößerten Zahl multipliziert, ist das Ergebnis um 10 kleiner als das Quadrat der um 5 erhöhten Zahl. Für welche Zahlen gilt das?

Für die unbekannte Zahl verwenden wir das Symbol x. Der Text entspricht dann:
$2\,x \cdot (x + 4) = (x + 5)^2 - 10$
Ausmultipliziert: $2\,x^2 + 8\,x = x^2 + 10\,x + 25 - 10 = x^2 + 10\,x + 15$
Geordnet: $x^2 - 2\,x - 15 = 0$
Gelöst (p-q-Formel): $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-\mathbf{(}-15\mathbf{)}} = 1 \pm 4$; $\mathbf{x_1 = 5}$; $\mathbf{x_2 = -3}$.
{Kontrolle: für $x_1 = 5$: $10 \cdot 9 = 90 = 10^2 - 10$ ✓;
für $x_2 = -3$: $(-6) \cdot 1 = -6 = 2^2 - 10$ ✓ }

TEIL 3: Erkennen von Sonderfällen

In Sonderfällen kann man die Lösung schneller erhalten; man sollte dann nicht den längeren Weg über die Lösungsformeln wählen.

1. Trivial: $a\,x^2 = 0$ (mit $a \neq 0$) ⇒"rein quadratisch"

Hier ist die Lösung sofort klar: $\mathbf{x = 0}$
(Wenn $ax^2 = 0$ ist $x^2 = 0$, weil $a \neq 0$; wenn $x^2 = 0$, ist auch $x = 0$.)

2. $a\,x^2 + c = 0$ oder **$x^2 + q = 0$ ⇒"kein lineares Glied"**

- Durch Umstellen: $x^2 = - c / a$ und $\mathbf{x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}}$
- oder: $x^2 = - q$ und $\mathbf{x = \pm \sqrt{-q}}$

Falls dabei die Wurzel aus einer negativen Zahl vorkommt, existiert keine Lösung.

3. $a\,x^2 + b\,x = 0$ oder **$x^2 + p\,x = 0$ ⇒"kein absolutes Glied"**

Hier kann man ein Produkt bilden.

Für ein Produkt gilt dann: $u \cdot v = 0$, wenn $u = 0$ oder $v = 0$.

- $a\,x^2 + b\,x = 0 = (a\,x + b) \cdot x$; also $\mathbf{x_1 = 0}$ und $\mathbf{x_2 = - \frac{b}{a}}$
- $x^2 + p\,x = 0 = (x + p) \cdot x$; also $\mathbf{x_1 = 0}$ und $\mathbf{x_2 = - p}$

4. Fall a = 0 ?

Dann liegt keine quadratische Gleichung vor!
⇒ $0 \cdot x^2 + b\,x + c = 0$ ist die lineare Gleichung $b\,x + c = 0$!

Beispiele

$x^2 - 9 = 0$

Das lösen wir einfach: $x^2 = 9$; $\mathbf{x_1 = 3}$; $\mathbf{x_2 = -3;}$
… und <u>nicht</u> umständlich mit der p-q-Formel: "$x^2 + 0 \cdot x - 9 = 0$";
$x_{1,2} = 0 \pm \sqrt{0-\mathbf{(}-9\mathbf{)}} = 0 \pm 3$.

$x^2 - 4\,x = 0$

Einfach: $x \cdot (x - 4) = 0$; $\mathbf{x_1 = 0}$; $\mathbf{x_2 = 4}$;
Nicht: "$x^2 - 4\,x + 0 = 0$"; $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-0} = 2 \pm 2$.

TEIL 4: Übungsaufgaben

1. Anwendung der Formeln

Entscheiden Sie jeweils, ob die Gleichung eine Lösung hat! Falls ja, geben Sie diese Lösungen $x_{1,2}$ an.

1) $x^2 - 2x - 8 = 0$
2) $x^2 - 2x + 8 = 0$
3) $x^2 - 2x + 1 = 0$
4) $2x^2 - 12x + 20 = 2$
5) $3x^2 - 9x + 18 = 12x - 12$
6) $2x^2 + 4x + x \cdot (x + 6) + 10 = 2x \cdot (x + 2)$
7) $3x^2 - 2x = 2x^2 + 3x$
8) $(x + 2)(x - 2) = 5$
9) $10x^2 - 60x + 105 = (3x - 10)^2$

2. Mit symbolischen Konstanten

In diesen Aufgaben ergibt sich als Lösung jeweils ein Ausdruck, der die symbolische Konstante a enthält.

1) $x^2 + 2ax - 8a^2 = 0$; berechnen Sie x.
2) $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{5}{2}$; berechnen Sie x. ($a \neq 0$, damit eine Lösung möglich ist)
3) $x^2 + (a^2 - a^3) \cdot x = a^5$; berechnen Sie x.
   Rechenfertigkeiten mit Exponenten sind hier nötig!
   Berechnen Sie zuerst mit der binomischen Formel die Ausdrücke $(a^2 \pm a^3)^2$.
   (Sie benötigen beides im Verlauf der Auflösung mit der p-q-Formel.)
4) $\frac{x+a}{a^2} = \frac{4a^2 - 1}{x - a}$

3. Mit Text in der Aufgabenstellung

1) Die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist 13. Eine Zahl ist um 5 größer als die zweite. Was sind die beiden Zahlen? Es gibt zwei Lösungen!
   Hinweis: Nennen Sie die beiden Zahlen a und b. Setzen Sie eine Gleichung in die andere ein, dann folgt eine quadratische Gleichung.
2) Für welche positive ganze Zahl gilt: Multipliziert man die Zahl mit dem Doppelten der nächsthöheren Zahl und addiert das Quadrat der übernächsten Zahl dazu ergibt das 244.
   Hinweis: Nennen Sie die unbekannte Zahl x; dann ist die nächsthöhere Zahl x+1 und die übernächste Zahl x+2.
3) Ein Rechteck hat die Fläche 21 cm^2 und den Umfang 20 cm. Berechnen Sie die Länge L und Breite B.
   Hinweis: Fläche = Länge · Breite; Umfang = 2 · (Länge + Breite);
   Es gibt zwei Lösungen $(x_1; x_2) = (L; B)$ und $(x_1; x_2) = (B; L)$, weil beim Vertauschen der Bezeichnungen Länge und Breite die geometrische Figur dieselbe bleibt. Üblicherweise wählt man die Lösung, bei der die Länge größer als die Breite ist.
4) Für zwei positive Ganzzahlen gilt: Die größere Zahl ist um 2 kleiner als das doppelte der kleineren. Das Quadrat der Summe der beiden Zahlen ist 49. Welches sind die beiden Zahlen?
   Hinweis: Wir haben damit 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Die einfachere der beiden Gleichungen wird nach einer Variablen aufgelöst. Dieses Ergebnis wird in die andere Gleichung eingesetzt; dann entsteht eine quadratische Gleichung. Von den entstehenden zwei Lösungen ist nur eine mit der Aufgabenstellung verträglich!

4. "Chemische" Rechnungen

Im Verlaufe Ihrer Ausbildung können Ihnen quadratische Gleichungen werden vor allem im Zusammenhang mit chemischen Gleichgewichten begegnen. Die Übungen hier enthalten Beispiele für den dann nötigen Rechenweg; die chemischen Grundlagen, die zu solchen Gleichungen führen werden Sie später (genügend ausführlich) kennen lernen!

Hinweis: Bei diesen Aufgaben sind die Lösungen nicht mehr Ganzzahlen. Der Rechenaufwand ist also größer. Sie benötigen also auf jeden Fall den Taschenrechner!

Nützlich ist dabei, wenn Sie auch wissen, wie man **Zwischenergebnisse speichern** kann:

In der p-q-Formel berechnet man zuerst (- p / 2); dieses Zwischenergebnis sollte man speichern; unter dem Wurzelzeichen steht als erstes das Quadrat davon. Das Ergebnis der gesamten Wurzel benötigt man auch zweimal und wird daher auch zwischengespeichert, außer man hat nur einen ganz billigen Taschenrechner mit nur 1 Speicher.

$$x_{1,2} = \underbrace{\boxed{-\left(\frac{p}{2}\right)}}_{1.} \pm \underbrace{\boxed{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}}_{2.}$$

1. **Zwischenresultat** **2.**

Dann ist die Lösung der quadratischen Gleichung:

$x_{1,2}$ = 1. Zwischenresultat ± 2. Zwischenresultat

1) Gleichung: $K = \frac{x}{(a-x)(b-x)}$; berechnen Sie x für die Werte K = 0,05, a = 2 und b = 3.

   Setzen Sie gleich die Zahlenwerte ein; das ist hier einfacher, als zuerst die symbolische Gleichung aufzulösen.
   Von den zwei Lösungen $x_{1,2}$ der quadratischen Gleichung ist nur eine davon aus chemischen bzw. physikalischen Gründen möglich.
   ⇒ a, b und x sind Mengen von Stoffen und diese können nie negativ sein.
   In unserem Fall müssen x, (a - x) und (b - x) positive Zahlen sein.

2) Gleichung: $K = \frac{x^2}{(c-x)}$; berechnen Sie x für die Werte K = 5; c = 1,5.

   Auflösen nach Potenzen von x führt zu einer quadratischen Gleichung. Als Lösung erhalten Sie zwei Werte für x. Nur einer davon ist aus chemischen Gründen möglich.
   (Der zweite Wert ist zwar rechnerisch möglich, aber chemisch / physikalisch unsinnig.)
   In unserem Fall müssen x und (c - x) positive Zahlen sein.

3) Gleichung: $K = \frac{\alpha^2 c}{(1-\alpha)}$; berechnen Sie α für die Werte $K = 1{,}8\cdot 10^{-5}$; $c = 5\cdot 10^{-4}$.

   Auflösen der quadratischen Gleichung führt zu 2 Werten für α;
   nur der positive Wert ist aus chemisch / physikalischen Gründen möglich!